Ejercicios 1
Ecuaciones Diferenciales
Variables separables, ecuaciones homogéneas, ecuaciones lineales, ecuaciones de Bernoulli y Riccati.

En cada uno de los problemas del 1 al 16, determine si lo ecuación diferencial es separable. Si lo es encuentre la solución general (definida en forma explícita o implícita). Si no es separable, no intente resolverla en este momento.

1. $\dfrac{y^2}{x}\dfrac{dy}{dx} = 1 + x^2$

2. $y + x\dfrac{dy}{dx} = 0$

3. $\cos(y)\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x+y)$

4. $(2y + xy)\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2}$

5. $3\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x}{y^2}$

6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x+1)^2 - 2y}{y}$

7. $\dfrac{dy}{dx} + y = y\,[\operatorname{sen}(x) + 1]$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x + xy^2}{2y + x^2 y}$

9. $\dfrac{dy}{dx} = y\,\dfrac{x^2 - 2x + 1}{y + 3}$

10. $\ln(y^x)\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 y$

11. $e^{x+y}\dfrac{dy}{dx} = 2x$

12. $(x+y)^2\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

13. $x\operatorname{sen}(y)\dfrac{dy}{dx} = \sec(y)$

14. $3x^2y - 6x^3 - y^2 + 2xy + (2x^2 - xy)\dfrac{dy}{dx} = 0$

15. $\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y^2 + 1}{x + 1}$

16. $[\cos(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]\dfrac{dy}{dx} = \cos(2x)$

En cada uno de los problemas del 17 al 26, obtenga la solución general (quizá definida en forma implícita) de la ecuación diferencial separable. Luego encuentre una solución particular (quizá definida de manera implícita) que satisfaga la condición inicial y el intervalo máximo donde está definida.

17. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2(y+2)\,;\; y(4) = 8$

18. $x\dfrac{dy}{dx} = y^2\,;\; y(3) = 5$

19. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+2}{y}\,;\; y(1) = 7$

20. $y\,\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y+4}\,;\; y(3) = 2$

21. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-1}{y+2}\,;\; y(-1) = 6$

22. $x^2\,\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y}\,;\; y(4) = 9$

23. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\,e^y\,;\; y(1) = 4$

24. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3x}{y+4}\,;\; y(2) = 7$

25. $\dfrac{dy}{dx} = y\,\dfrac{-2\text{sen}(1+x)}{y^2}\,;\; y(\pi) = 4$

26. $2y\,\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y^2}\,;\; y(4) = -2$

27. Evalúe la integral $\int_0^\infty e^{-(t^2+(9/t^2))}\,dt$.

Sugerencia: Sea $I(x) = \int_0^\infty e^{-(t^2+(x/t)^2)}\,dt$. Obtenga $I'(x)$ derivando bajo el signo de la integral con respecto a x. Demuestre que $I'(x) = -2\,I(x)$ y resuelva esta ecuación para obtener $I(x)$. Dé por conocido el hecho de que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$ para obtener la condición inicial.

En cada uno de los problemas del 1 al 10, determine si la ecuación diferencial es homogénea. Si lo es, encuentre una expresión que contenga la solución general. Si no es homogénea, no intente resolverla en este momento.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x+y}$

3. $x\,\dfrac{dy}{dx} = y^2$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x}$

5. $(x+y)\,\dfrac{dy}{dx} = y$

6. $(x-2y)\,\dfrac{dy}{dx} = 2x-y$

7. $x^3\,\dfrac{dy}{dx} = x^2y - y^3$

8. $x\,\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

9. $x^2\,\dfrac{dy}{dx} = y^2$

10. $x\,\dfrac{dy}{dx} = x\,\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) + y$

En cada uno de los problemas del 11 al 21, encuentre una expresión que contenga la solución general de la ecuación diferencial que se reduce a homogénea.

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-3}{x+y+1}$

12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-3y-7}{x-4}$

13. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y+2}{x-y+3}$

14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y+7}{-2x+y-9}$

15. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x+y-1}{6x+2y-3}$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-2y}{3x-6y+4}$

17. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x-y-9}{x+y+1}$

18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y+6}{3x-3y+4}$

19. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-5y-9}{-4x+y+9}$

20. $\dfrac{dy}{dx} = \left[\dfrac{x-y+1}{x+1}\right]^2$

21. $\dfrac{dy}{dx} = \left[\dfrac{x-y+1}{2x-2y}\right]^2$

En cada uno de los problemas del 22 al 30, obtenga la solución (quizá definida en forma implícita) del problema de valor inicial.

22. $x\,\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+y^2} + y\,;\ y(3) = 0$

23. $x\,\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2-y^2}\,;\ y(1) = \dfrac{1}{2}$

24. $x\,\dfrac{dy}{dx} = y + 4\sqrt{xy}\,;\ y(e) = 9e$

25. $y^2\,\dfrac{dy}{dx} = x^2 + \dfrac{1}{x}\,y^3\,;\ y(e) = 2e$

26. $x\,\dfrac{dy}{dx} = 3y + \dfrac{1}{x}\,y^2\,;\ y(1) = 4$

27. $(x-2y)\,\dfrac{dy}{dx} = x-y\,;\ y(1) = 4$

28. $x\,\dfrac{dy}{dx} - y = \dfrac{y}{\ln(y)-\ln(x)}\,;\ y(1) = e$

29. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2-y^2}{x^2}\,;\ y(2) = 8$

30. $(x+2y)\,\dfrac{dy}{dx} = y-3x\,;\ y(1) = 6$

En cada uno de los problemas del 1 al 12 encuentre la solución general de la ecuación diferencial.

1. $y' - \dfrac{1}{x}\,y = x^2 + 2$

2. $y' - \dfrac{3}{x}\,y = 2x^2$

3. $2y' + 3y = e^{2x}$

4. $y' - y = \operatorname{senh}(x)$

5. $y' + 2y = x$

6. $\operatorname{sen}(2x)\,y' + 2\operatorname{sen}^2(x)\,y = 2\operatorname{sen}(x)$

7. $y' + \dfrac{1}{x}\,y = 3e^{-x^2}$

8. $y' - 2y = -8x^2$

9. $(x^2 - x - 2)\,y' + 3xy = x^2 - 4x + 4$

10. $y' - 6y = x - \cosh(x)$

11. $y' - xy = 3x$

12. $xy' + \dfrac{2}{x}\,y = 4$

En cada uno de los problemas del 13 al 20, obtenga una solución del problema de valor inicial.

13. $y' - y = 2\,e^{4x}\,;\ y(0) = -3$

14. $y' + 3y = 5\,e^{2x} - 6\,;\ y(0) = 2$

15. $y' + \dfrac{5y}{9x} = 3x^3 + x\,;\ y(-1) = 4$

16. $y' + \dfrac{3y}{2x} = x^3 - 1\,;\ y(1) = 2$

17. $y' + \dfrac{4}{x}\,y = 2\,;\ y(1) = -4$

18. $y' + \dfrac{2}{x+1}\,y = 3\,;\ y(0) = 5$

19. $y' + \dfrac{1}{x-2}\,y = 3x\,;\ y(3) = 4$

20. $y' - 4y = x + \operatorname{sen}(x)\,;\ y(0) = 3$

21. Obtenga la solución general de

$$\left(1 - 2x\,e^{2y}\right)\frac{dy}{dx} - e^{2y} = 0\,.$$

Sugerencia: Invierta los papeles de x e y como variables independiente y dependiente.

22. Utilice la idea del problema 21 para obtener la solución general de

$$\left(4y^3 - x\right)\frac{dy}{dx} = y\,.$$

En cada uno de los problemas del 23 al 28, obtenga la solución general de la ecuación de Bernoulli.

23. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}\,y = 3x^2y^3$

24. $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 4xy^2$

25. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3}{x}\,y = -2xy^{\frac{5}{2}}$

26. $\dfrac{dy}{dx} + 8y = 2x^3y^{\frac{3}{4}}$

27. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{4}{x}\,y = xy^4$

28. $x^3\,\dfrac{dy}{dx} + x^2y = 2y^{-\frac{4}{3}}$

En cada uno de los problemas del 1 al 10, obtenga la solución general de la ecuación de Riccati y use esta solución general para obtener una solución del problema de valor inicial.

1. $y' = \dfrac{1}{x^2}\,y^2 - \dfrac{1}{x}\,y + 1\,;\; y(1) = 3$ $\quad$ $Sugerencia$: Una solución es $S(x) = x$.

2. $y' = \dfrac{1}{2x}\,y^2 - \dfrac{1}{x}\,y - \dfrac{4}{x}\,;\; y(2) = -6$ $\quad$ $Sugerencia$: Una solución es $S(x) = 4$.

3. $y' = -\dfrac{1}{x}\,y^2 + \dfrac{2}{x}\,y\,;\; y(1) = 4$

4. $y' = y^2 + \left(\dfrac{1}{x} - 2\right) y - \dfrac{1}{x} + 1\,;\; y(1) = 2$

5. $y' = -e^{-x}\,y^2 + y + e^x\,;\; y(0) = 6$ $\quad$ $Sugerencia$: Pruebe $S(x)$ de la forma ae^{kx}.

6. $y' = e^{2x}\,y^2 - 2y - 9e^{-2x}\,;\; y(0) = 4$ $\quad$ $Sugerencia$: Pruebe $S(x)$ de la forma ae^{kx}.

7. $y' = \dfrac{1}{16x^2}\,y^2 - y + 4x(x+4)\,;\; y(1) = -3$ $\quad$ $Suger$: Pruebe $S(x)$ de la forma ax^b.

8. $y' = y^2 - \frac{6}{x^2}\,y - \frac{6}{x^3} + \frac{9}{x^4}\,;\; y(2) = 4$

9. $y' = xy^2 + \left(-8x^2 + \dfrac{1}{x}\right) y + 16x^3\,;\; y(2) = 6$

10. $y' = \frac{1}{x}\,e^{-3x}\,y^2 - \frac{1}{x}\,y + 3e^{3x}\,;\; y(3) = -4$