TALLER 7

Pasos para la resolución de problemas aplicados de optimización

1. *Leer el problema*. lea el problema hasta que lo entienda. ¿Qué datos se dan? ¿Cuál es la cantidad desconocida que hay que optimizar?
2. *Hacer un dibujo*: identifique con una etiqueta cualquier parte que pueda ser importante para el problema.
3. *Introducir variables*: haga una lista de las relaciones que encuentre en el dibujo y en el problema como una ecuación o una expresión algebraica, e identifique la variable desconocida.
4. *Escribir una ecuación para la cantidad desconocida*: de ser posible, exprese la incógnita como función de una sola variable o en dos ecuaciones con dos incógnitas. Para ello puede ser necesaria una manipulación considerable.
5. *Examinar los puntos críticos y los extremos del dominio de la incógnita*: use la información con que cuenta acerca de la forma de la gráfica de la función. Emplee la primera y segunda derivadas para identificar y clasificar los puntos críticos de la función.

1.- Halla dos números que sumados den 20 y cuyo producto sea máximo.

Sean x e y los números buscados. El problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ xy \ \text{máximo} \end{cases}$$

Llamamos p al producto de los dos números, esto es, $p = xy$ [*]

Como $x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$ y sustituyendo en [*] resulta:

$$p = x(20 - x) = 20x - x^2$$

Vamos a calcular el (o los) máximo(s) de la función $p(x)$:

$$p'(x) = 20 - 2x$$
$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 20 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 10$$
$$p''(x) = -2$$
$$p''(10) < 0 \Rightarrow x = 10 \ \text{es un máximo}$$

Por tanto, los números buscados son:

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 20 - 10 = 10 \end{cases}$$

2.- Halla dos números tales que el cuadrado de uno multiplicado por el otro sea máximo, si la suma de dichos números es 40.

Sean x e y los números buscados. El problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x+y=40 \\ x^2 y \ \text{ máximo} \end{cases}$$

Llamamos $p = x^2 y$. Como $x+y=40$ se tiene que $y = 40-x$ y por tanto:

$$p = x^2(40-x) = 40x^2 - x^3$$

Vamos a maximizar la función $p(x)$:

$$p'(x) = 80x - 3x^2$$

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 80x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x(80-3x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 80 - 3x = 0 \Rightarrow x = 80/3 \end{cases}$$

$$p''(x) = 80 - 6x$$

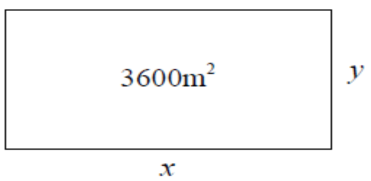
$$p''(0) = 80 > 0 \Rightarrow x = 0 \ \text{ es un mínimo (no nos interesa)}$$

$$p''\left(\frac{80}{3}\right) = -80 < 0 \Rightarrow x = \frac{80}{3} \ \text{ es un máximo}$$

Los números buscados son:

$$\begin{cases} x = \dfrac{80}{3} \\ y = 40 - \dfrac{80}{3} = \dfrac{40}{3} \end{cases}$$

3.- Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3 600 m^2 de superficie, para poderlo cercar con una valla de longitud mínima.



Por la fórmula del área del rectángulo se tiene:

$$xy = 3600$$

Por otro lado, la superficie que tenemos que vallar es $2x + 2y$

Así, el problema a resolver es:

$$\begin{cases} xy = 3600 \\ 2x + 2y \ \text{ mínima} \end{cases}$$

Como $xy = 3600 \Rightarrow y = \dfrac{3600}{x}$

Llamando $f = 2x + 2y$ y sustituyendo $y = \dfrac{3600}{x}$ obtenemos:

$$f(x) = 2x + 2\frac{3600}{x} = \frac{2x^2 + 7200}{x}$$

Vamos a minimizar f:

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 2x^2 - 7200}{x^2} = \frac{2x^2 - 7200}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7200 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 60$$

$$f''(x) = \frac{14400}{x^3}$$

$$f''(-60) < 0 \Rightarrow x = -60 \ \text{ es un máximo (no nos interesa)}$$

$$f''(60) > 0 \Rightarrow x = 60 \ \text{ es un mínimo}$$

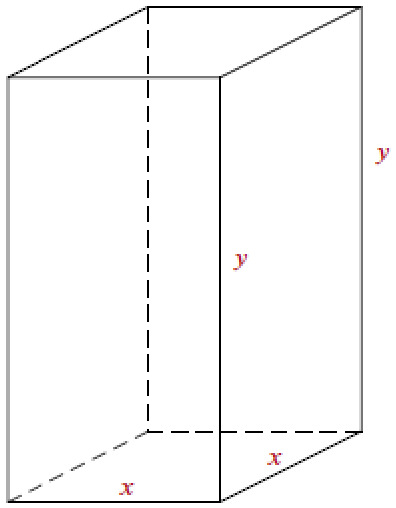
Por tanto, las dimensiones del campo son:

$$\begin{cases} x = 60 \text{ m} \\ y = \dfrac{3600}{60} = 60 \text{ m} \end{cases}$$

(es decir, se trata de un cuadrado)

Ejemplo 10.1.1 *Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 50 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material que va a ser usado.*

▼ La siguiente figura representa la caja:



Volumen de la caja, según la figura:

$$V = x^2y \ \&\ V = 50 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ 50 = x^2y; \text{ esta igualdad relaciona las variables del problema.}$$

De esta ecuación podemos obtener y como función de x o viceversa, despejando la variable elegida.

El área de la caja sin tapa:

$$A = x^2 + 4xy\,.$$

Ésta es la cantidad de material que deseamos que sea mínima; vemos que es una función de dos variables.

Despejamos y de la restricción dada, esto es, de la fórmula del volumen:

$$y = \frac{50}{x^2}\,.$$

Sustituimos en el área y obtenemos una función de una sola variable:

$$A(x) = x^2 + 4x\left(\frac{50}{x^2}\right) = x^2 + \frac{200}{x} = x^2 + 200x^{-1}\,.$$

Derivando:

$$A'(x) = 2x - 200x^{-2} = 2x - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^3 - 200}{x^2};$$
$$A''(x) = 2 + 200\left(\frac{2}{x^3}\right) = 2 + \frac{400}{x^3} > 0\,.$$

Calculamos puntos críticos:

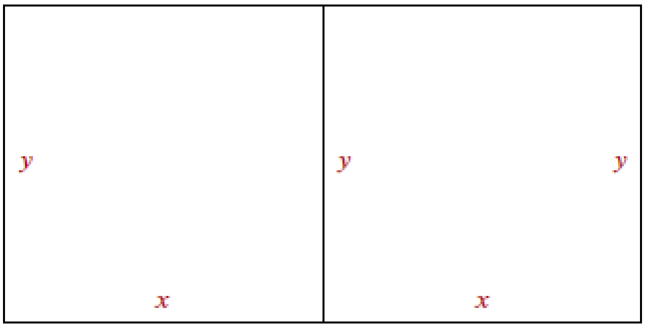
$$A'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 200 = 0 \Rightarrow x^3 = 100 \Rightarrow x = \sqrt[3]{100}\ \text{cm}.$$

Es un mínimo absoluto pues $A''(x) > 0$ para cualquier $x > 0$. El valor correspondiente de la otra variable es

$$y = \frac{50}{100^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\frac{100}{100^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}100^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{100} = \frac{1}{2}x\ \text{cm}.$$

□

Ejemplo 10.1.2 *Un ranchero tiene 300 m de malla para cercar dos corrales rectangulares iguales y contiguos, es decir, que comparten un lado de la cerca. Determinar las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima.*



Tenemos que el perímetro y el área de los corrales son, respectivamente:

$$P = 4x + 3y = 300 \quad \& \quad A = 2xy.$$

Pero como $y = \dfrac{300 - 4x}{3}$:

$$A(x) = \frac{2x(300 - 4x)}{3} = 200x - \frac{8}{3}x^2.$$

Derivando y obteniendo los puntos críticos:

$$A'(x) = 200 - \frac{16}{3}x = 0 \Leftrightarrow \frac{16}{3}x = 200 \Leftrightarrow x = \frac{3 \cdot 200}{16} = \frac{75}{2} \text{ es el punto crítico}$$

y como

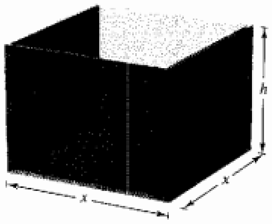
$$A''(x) = -\frac{16}{3} < 0, \text{ entonces se trata de un máximo.}$$

El área máxima ocurre para $x = \dfrac{75}{2}$ m & $y = \dfrac{300 - 150}{3} = 50$ m, que son las dimensiones pedidas.

□

EJEMPLO 1 **Determinación del volumen máximo**

Un fabricante quiere diseñar una caja abierta que tenga una base cuadrada y un área superficial de 108 pulgadas cuadradas, como se muestra en la figura 3.53. ¿Qué dimensiones producirá una caja con un volumen máximo?



Caja abierta con base cuadrada: $S = x^2 + 4xh = 108$
Figura 3.53

Solución Debido a que la caja tiene una base cuadrada, su volumen es

$$V = x^2h \qquad \text{Ecuación primaria.}$$

Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación primaria** porque proporciona una fórmula para la cantidad que se va a optimizar. El área de la superficie de la caja es

$$S = (\text{área de la base}) + (\text{área de los cuatro lados})$$
$$S = x^2 + 4xh = 108. \qquad \text{Ecuación secundaria.}$$

Como V se va a maximizar, escribir V como una función de una sola variable. Para hacerlo, es posible resolver la ecuación $x^2 + 4xh = 108$ para h en términos de x y obtener $h = (108 - x^2)/(4x)$. Sustituyendo en la ecuación primaria, se obtiene

$$V = x^2h \qquad \text{Función de dos variables.}$$
$$= x^2\left(\frac{108 - x^2}{4x}\right) \qquad \text{Sustituir para } h.$$
$$= 27x - \frac{x^3}{4}. \qquad \text{Función de una variable.}$$

Antes de determinar qué valor de x producirá un valor máximo de V, se necesita determinar el *dominio admisible*. Esto es, ¿qué valores de x tienen sentido en este problema? Se sabe que, $V \geq 0$. También que x debe ser no negativa y que el área de la base ($A = x^2$) es a lo sumo 108. De tal modo, el dominio admisible es

$$0 \leq x \leq \sqrt{108}. \qquad \text{Dominio admisible.}$$

Para maximizar V, determinar los puntos críticos de la función de volumen.

$$\frac{dV}{dx} = 27 - \frac{3x^2}{4} = 0 \qquad \text{Igualar la derivada a cero.}$$
$$3x^2 = 108 \qquad \text{Simplificar.}$$
$$x = \pm 6 \qquad \text{Puntos críticos.}$$

De tal modo, los puntos críticos son $x = \pm 6$. No se necesita considerar $x = -6$ porque está fuera del dominio. La evaluación V en el punto crítico $x = 6$ y en los puntos terminales del dominio produce $V(0) = 0$, $V(6) = 108$ y $V(\sqrt{108}) = 0$. De tal modo, V es máximo cuando $x = 6$ y las dimensiones de la caja son $6 \times 6 \times 3$ pulgadas.

TECNOLOGÍA Puede verificar la respuesta utilizando una calculadora para representar la función volumen
$$V = 27x - \frac{x^3}{4}.$$

Usar una ventana de observación en la que $0 \leq x \leq \sqrt{108} \approx 10.4$ y $0 \leq y \leq 120$, y la función *trace* para determinar el valor máximo de V.

TALLER 7

TEOREMA 7 **Regla de L'Hôpital (forma más fuerte)**

Supongamos que $f(a) = g(a) = 0$, que f y g son diferenciables en un intervalo abierto I que contiene a a, y que $g'(x) \neq 0$ en I si $x \neq a$. Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

suponiendo que el límite del lado derecho existe.

EJEMPLO 2 Aplicación de la forma fuerte de la regla de L'Hôpital

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1/2)(1+x)^{-1/2} - 1/2}{2x} \qquad \text{Todavía } \frac{0}{0}\text{; diferenciar nuevamente}$$

REGLA DE L'HÔPITAL

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt{2x+10}-4\right)}{(x-3)} \frac{\left(\sqrt{2x+10}+4\right)}{\left(\sqrt{2x+10}+4\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{2x+10-16}{(x-3)\left(\sqrt{2x+10}+4\right)} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+10}+4\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{2}{\sqrt{2x+10}+4} = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x} = 2 .$$

Encuentre $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

SOLUCIÓN No podemos aplicar la Ley 5 (Límite de un Cociente) de inmediato, porque el límite del denominador es 0. Aquí, el álgebra preliminar consiste en racionalizar el numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} &= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3} && \text{Racionalice el numerador} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(t^2+9)-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t\to 0}(t^2+9)}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(9+6h+h^2)-9}{h} && \text{Expanda} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{6h+h^2}{h} && \text{Simplifique} \\
&= \lim_{h\to 0} (6+h) && \text{Cancele } h \\
&= 6 && \text{Sea } h \to 0
\end{aligned}$$