COROLARIO 3 Criterio de la primera derivada para funciones monótonas

Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b).

Si $f'(x) > 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$.

Si $f'(x) < 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$.

EJEMPLO 1 Uso del criterio de la primera derivada para funciones monótonas

Encontrar los puntos críticos de $f(x) = x^3 - 12x - 5$ identificar los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente.

Solución La función f es continua y diferenciable en todas partes. La primera derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) \\ &= 3(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

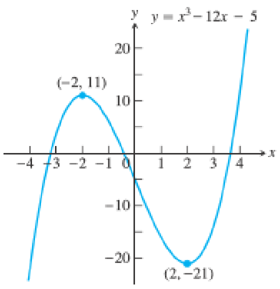


FIGURA 4.22 La función $f(x) = x^3 - 12x - 5$ es monótona en tres intervalos separados (ejemplo 1).

es cero en $x = -2$ y $x = 2$. Estos puntos críticos subdividen el dominio de f en los intervalos $(-\infty, -2), (-2, 2)$, y $(2, \infty)$, en los que f' es positiva o negativa. Determinamos el signo de f' evaluándola en un punto adecuado en cada subintervalo. Aplicando el corolario 3 a cada subintervalo podemos determinar el comportamiento de f. Los resultados se resumen en la siguiente tabla, y en la figura 4.22 se muestra la gráfica de f.

Intervalos	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
f' evaluada	$f'(-3) = 15$	$f'(0) = -12$	$f'(3) = 15$
Signo de f'	+	−	+
Comportamiento de f	creciente	decreciente	creciente

EJEMPLO 2 Uso de la prueba de la primera derivada para extremos locales

Encontrar los puntos críticos de

$$f(x) = x^{1/3}(x - 4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}.$$

Identificar los intervalos en los que f es creciente y decreciente. Encontrar los valores extremos locales y absolutos de la función.

Solución La función f es continua para toda x por ser el producto de dos funciones continuas, $x^{1/3}$ y $(x - 4)$. La primera derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^{4/3} - 4x^{1/3}\right) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{4}{3}x^{-2/3}\left(x - 1\right) = \frac{4(x - 1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

es cero en $x = 1$ y no está definida en $x = 0$. No hay puntos extremos en el dominio, de manera que los puntos críticos $x = 0$ y $x = 1$ son los únicos lugares donde f podría tener un valor extremo.

Los puntos críticos dividen el eje x en intervalos en los que f' es positiva o negativa. El patrón de los signos de f' revela el comportamiento de f entre y en los puntos críticos. Podemos listar la información en una tabla como la siguiente:

Intervalos	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Signo de f'	−	−	+
Comportamiento de f	crecimiento	decrecimiento	crecimiento

Prueba de la segunda derivada para concavidad

Sea $y = f(x)$ dos veces diferenciable en un intervalo I.

1. Si $f'' > 0$ en I, la gráfica de f en I es cóncava hacia arriba.
2. Si $f'' < 0$ en I, la gráfica de f en I es cóncava hacia abajo.

EJEMPLO 5 Análisis del movimiento a lo largo de una recta

Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal con una función posición

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5, \qquad t \geq 0.$$

Encontrar la velocidad y la aceleración de la partícula, y describir su movimiento.

Solución La velocidad es

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22 = 2(t - 1)(3t - 11),$$

y la aceleración es

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t - 7).$$

Cuando la función $s(t)$ crece, la partícula se mueve a la derecha; cuando $s(t)$ decrece, la partícula se mueve a la izquierda.

Observe que la primera derivada $(v = s')$ es cero cuando $t = 1$ y $t = 11/3$.

Intervalos	$0 < t < 1$	$1 < t < 11/3$	$11/3 < t$
Signo de $v = s'$	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de s	creciente	decreciente	creciente
Movimiento de la partícula	a la derecha	a la izquierda	a la derecha

La partícula se mueve a la derecha en los intervalos de tiempo $[0, 1)$ y $(11/3, \infty)$, y se mueve a la izquierda en $(1, 11/3)$. Permanece estacionaria (en reposo) un momento en $t = 1$ y $t = 11/3$.

La aceleración $a(t) = s''(t) = 4(3t - 7)$ es cero cuando $t = 7/3$.

Intervalos	$0 < t < 7/3$	$7/3 < t$
Signo de $a = s''$	$-$	$+$
Gráfica de s	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

TEOREMA 5 Prueba de la segunda derivada para extremos locales

Supongamos que f'' es continua en un intervalo abierto que contiene a $x = c$.

1. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, f tiene un máximo local en $x = c$.
2. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, f tiene un mínimo local en $x = c$.
3. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) = 0$, la prueba falla. La función f puede tener un máximo local, un mínimo local, o ninguno de ellos.

EJEMPLO 6 Uso de f' y f'' para graficar f

Graficar la función

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$

usando los pasos siguientes.

(a) Identificar en dónde se alcanzan los extremos de f.

(b) Encontrar los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente.

(c) Encontrar en qué parte la gráfica de f es cóncava hacia arriba y en qué parte es cóncava hacia abajo.

(d) Dibujar la forma general de la gráfica para f.

(e) Trazar algunos puntos específicos, tales como los puntos máximos y mínimos locales, los puntos de inflexión y las intersecciones con los ejes. Después, dibujar la curva.

Solución f es continua, ya que $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ existe. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$, y el dominio de f' también es $(-\infty, \infty)$. Por lo tanto, los puntos críticos de f se alcanzan solamente en los ceros de f'. Como

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

la primera derivada es cero en $x = 0$ y en $x = 3$.

Intervalos	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
Signo de f'	$-$	$-$	$+$
Comportamiento de f	crecimiento	decrecimiento	crecimiento

(a) Usando la prueba de la primera derivada para extremos locales y la tabla anterior, vemos que no existe un extremo en $x = 0$, ni un mínimo local en $x = 3$.

(b) Usando la tabla anterior, vemos que f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y $[0, 3]$, y creciente en $[3, \infty)$.

(c) $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$ es cero en $x = 0$ y $x = 2$.

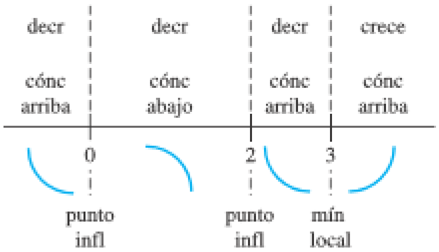
Intervalos	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
Signo de f'	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	cóncavo hacia arriba	cóncavo hacia abajo	cóncavo hacia arriba

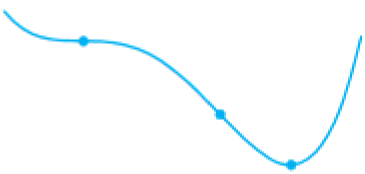
Vemos que f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$, y cóncava hacia abajo en $(0, 2)$.

(d) Resumiendo la información de las dos tablas anteriores, obtenemos

$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
decreciente cóncavo hacia arriba	decreciente cóncavo hacia abajo	decreciente cóncavo hacia arriba	creciente cóncavo hacia arriba

La forma general de la curva es





Forma general.

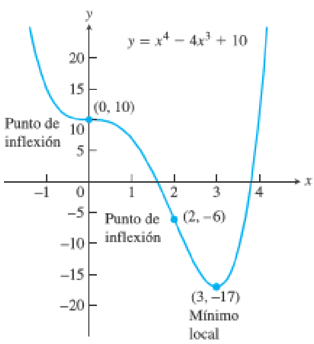


FIGURA 4.30 La gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ (ejemplo 6).

(e) Dibuje (de ser posible) las intersecciones con los ejes, y los puntos donde y' y y'' son cero. Indique todos los valores extremos y los puntos de inflexión. Use la forma general como guía para dibujar la curva. (Trace más puntos si es necesario). La figura 4.30 muestra la gráfica de f. ■

Los pasos del ejemplo 6 ayudan a delinear un procedimiento para dibujar la gráfica, tomando en cuenta las características clave de una función y su gráfica.

Estrategia para graficar $y = f(x)$

1. Identificar el dominio de f y cualesquiera simetrías que pueda tener la curva.
2. Encontrar y' y y''.
3. Encontrar los puntos críticos de f, e identificar el comportamiento de la función en cada uno.
4. Encontrar en dónde crece la curva y en dónde decrece.
5. Encontrar los puntos de inflexión, si hay alguno, y determinar la concavidad de la curva.
6. Identificar las asíntotas.
7. Trazar los puntos clave, tales como las intersecciones con los ejes y los puntos encontrados en los pasos 3 a 5, y dibujar la curva.

to. De la misma manera, $f(1) = 2$ es un máximo absoluto, ya que la gráfica nunca cruza la asíntota $y = 1$ en el intervalo $(-\infty, -1)$, aproximándose a ella por abajo. Por lo tanto, no hay asíntotas verticales (el rango de f es $0 \le y \le 2$).

7. En la figura 4.31 está dibujada la gráfica de f. Observe como la gráfica es cóncava hacia abajo al aproximarse a la asíntota horizontal $y = 1$ cuando $x \to -\infty$, y cóncava hacia arriba en su aproximación a $y = 1$ cuando $x \to \infty$.

NOTA Un tercer caso del teorema 3.7 podría ser que si $f''(x) = 0$ para todo x en I, entonces f es lineal. Notar, sin embargo, que la concavidad no se define para una recta. En otras palabras una recta no es ni cóncava hacia arriba ni cóncava hacia abajo.

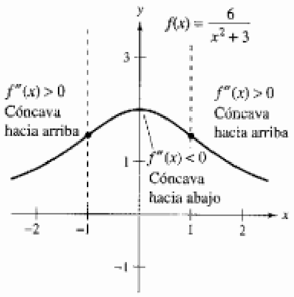
Para aplicar el teorema 3.7, se localizan los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$ o f'' no existe. Segundo, se usan los valores de x para determinar los intervalos de prueba. Por último, se prueba el signo de $f''(x)$ en cada uno de los intervalos de prueba.

EJEMPLO 1 Determinación de la concavidad

Determinar los intervalos abiertos en los cuales la gráfica de

$$f(x) = \frac{6}{x^2+3}$$

es cóncava hacia arriba o hacia abajo.



A partir del signo de f'' se puede determinar la concavidad de la gráfica de f
Figura 3.26

Solución Se empieza observando que f es continua en toda la recta real. A continuación, se encuentra la segunda derivada de f.

$$f(x) = 6(x^2+3)^{-1} \qquad \text{Reescribir la función original.}$$

$$f'(x) = (-6)(x^2+3)^{-2}(2x) \qquad \text{Derivar.}$$

$$= \frac{-12x}{(x^2+3)^2} \qquad \text{Primera derivada.}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+3)^2(-12) - (-12x)(2)(x^2+3)(2x)}{(x^2+3)^4} \qquad \text{Derivar.}$$

$$= \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3} \qquad \text{Segunda derivada.}$$

Como $f''(x) = 0$ cuando $x = \pm 1$ y f'' se define en toda la recta real, se debe probar f'' en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$. Los resultados se muestran en la tabla y en la figura 3.26.

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
Signo de $f''(x)$	$f''(-2) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(2) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

La función dada en el ejemplo 1 es continua en toda la recta real. Si hay valores de x en los cuales la función no es continua, dichos valores deben usarse junto con los puntos en los cuales $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no existe para formar los intervalos de prueba.

EJEMPLO 2 Determinación de la concavidad

Determinar los intervalos abiertos sobre los cuales la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Solución Al derivar dos veces se obtiene lo siguiente

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4} \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2-4)(2x)-(x^2+1)(2x)}{(x^2-4)^2} \qquad \text{Derivar.}$$

$$=\frac{-10x}{(x^2-4)^2} \qquad \text{Primera derivada.}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2-4)^2(-10)-(-10x)(2)(x^2-4)(2x)}{(x^2-4)^4} \qquad \text{Derivar.}$$

$$=\frac{10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \qquad \text{Segunda derivada.}$$

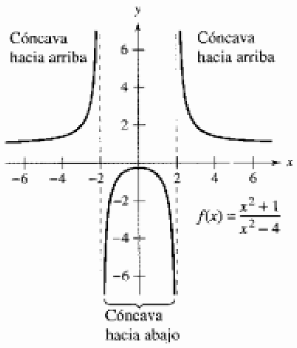


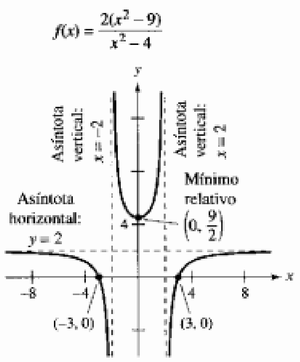
Figura 3.27

No hay puntos en los cuales $f''(x)=0$, pero en $x=\pm2$ la función f no es continua, por lo que se prueba la concavidad en los intervalos $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$ y $(2,\infty)$, como se ilustra en la tabla. La gráfica de f se muestra en la figura 3.27.

EJEMPLO 1 Dibujo de la gráfica de una función racional

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x)=\dfrac{2(x^2-9)}{x^2-4}$.

Solución



Primera derivada: $f'(x)=\dfrac{20x}{(x^2-4)^2}$

Segunda derivada: $f''(x)=\dfrac{-20(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$

Intersecciones en x: $(-3,0)$, $(3,0)$

Intersección en y $\left(0,\frac{9}{2}\right)$

Asíntotas verticales: $x=-2$, $x=2$

Asíntota horizontal: $y=2$

Punto crítico: $x=0$

Posibles puntos de inflexión: Ninguno

Dominio: Todos los números reales excepto $x=\pm2$

Simetría: Con respecto al eje y

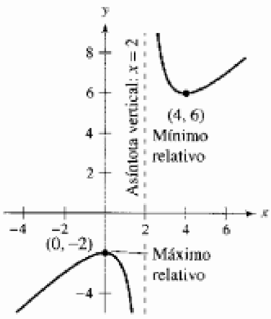
Intervalos de prueba: $(-\infty,-2)$, $(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,\infty)$

EJEMPLO 2 Dibujo de la gráfica de una función racional

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$.

Solución

Primera derivada:	$f'(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$
Segunda derivada:	$f''(x)=\dfrac{8}{(x-2)^3}$
Intersecciones en x:	Ninguna
Intersección en y:	$(0,-2)$
Asíntota vertical:	$x=2$
Asíntotas horizontales:	Ninguna
Comportamiento final o asintótico:	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$
Puntos críticos:	$x=0, x=4$
Posibles puntos de inflexión:	Ninguno
Dominio:	Todos los números reales excepto $x=2$
Intervalos de prueba:	$(-\infty,0),(0,2),(2,4),(4,\infty)$



$f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

Figura 3.47

El análisis de la gráfica de f se muestra en la tabla, y la gráfica se ilustra en la figura 3.47.

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x=-3$	$x=0$	$x=3$
Signo de $f''(x)$	$f''(-3)>0$	$f''(0)<0$	$f''(3)>0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Puntos de inflexión

La gráfica en la figura 3.26 tiene dos puntos en los cuales cambia la concavidad. Si la recta tangente a la gráfica existe en un punto de este tipo, ese punto es un **punto de inflexión**. Se muestran tres tipos de puntos de inflexión en la figura 3.28.

Definición de punto de inflexión

Sea f una función que es continua en un intervalo abierto y sea c un punto en ese intervalo. Si la gráfica de f tiene una recta tangente en este punto $(c, f(c))$, entonces este punto es un **punto de inflexión** de la gráfica de f si la concavidad de f cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo (o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba) en ese punto.

NOTA La definición de *punto de inflexión* dada en este libro requiere que la recta tangente exista en el punto de inflexión. Algunos libros no requieren esto. Por ejemplo, en este libro no se considera que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x<0 \\ x^2+2x, & x\ge 0 \end{cases}$$

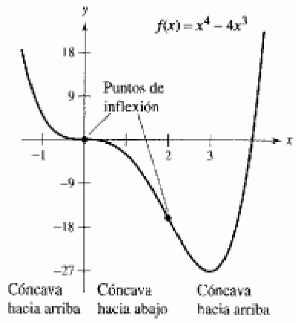
tenga un punto de inflexión en el origen, aun cuando la concavidad de la gráfica cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

La concavidad de f cambia en un punto de inflexión. Notar que la gráfica cruza su recta tangente en un punto de inflexión

Figura 3.28

TEOREMA 3.8 Punto de inflexión

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces $f''(c) = 0$ o f'' no existe en $x = c$.



Pueden ocurrir puntos de inflexión donde $f''(x) = 0$ o f'' no existe
Figura 3.29

EJEMPLO 3 Determinación de los puntos de inflexión

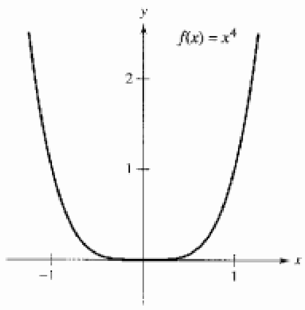
Determinar los puntos de inflexión y analizar la concavidad de la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Solución La derivación doble produce lo siguiente.

$f(x) = x^4 - 4x^3$ Escribir la función original.
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ Encontrar la primera derivada.
$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$ Encontrar la segunda derivada.

Haciendo $f''(x) = 0$ es posible determinar que los puntos de inflexión posibles ocurren en $x = 0$ y $x = 2$. Al probar los intervalos determinados por estos valores de x, se puede concluir que ambos producen puntos de inflexión. Un resumen de esta prueba se presenta en la tabla, y la gráfica de f se ilustra en la figura 3.29.

Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(3) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba



$f''(0) = 0$, pero $(0, 0)$ no es un punto de inflexión
Figura 3.30

El recíproco del teorema 3.8 por lo general no es cierto. Esto es, es posible que la segunda derivada sea 0 en un punto que no es un punto de inflexión. Por ejemplo, la gráfica de $f(x) = x^4$ se muestra en la figura 3.30. La segunda derivada es 0 cuando $x = 0$, pero el punto $(0, 0)$ no es un punto de inflexión porque la gráfica de f es cóncava hacia arriba en ambos intervalos $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$.

EXPLORACIÓN

Considerar una función cúbica general de la forma

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

Se sabe que el valor de d tiene relación con la localización de la gráfica, pero no con el valor de la primera derivada en los valores dados de x. Gráficamente, esto es cierto debido a que los cambios en el valor de d desplazan a la gráfica hacia arriba o hacia abajo, pero no cambian su forma básica. Utilizar una calculadora para representar gráficamente varias funciones cúbicas con diferentes valores de c. Después proporcionar una explicación gráfica de por qué los cambios en c no afectan los valores de la segunda derivada.

EJEMPLO 4 **Empleo del criterio de la segunda derivada**

Encontrar los extremos relativos correspondientes a $f(x) = -3x^5 + 5x^3$.

Solución Empezando con la determinación de los puntos críticos de f.

$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2) = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$

$$x = -1, 0, 1 \qquad \text{Puntos críticos.}$$

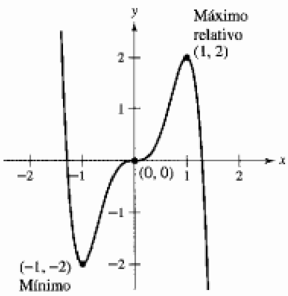
Empleando

$$f''(x) = -60x^3 + 30x = 30(-2x^3 + x)$$

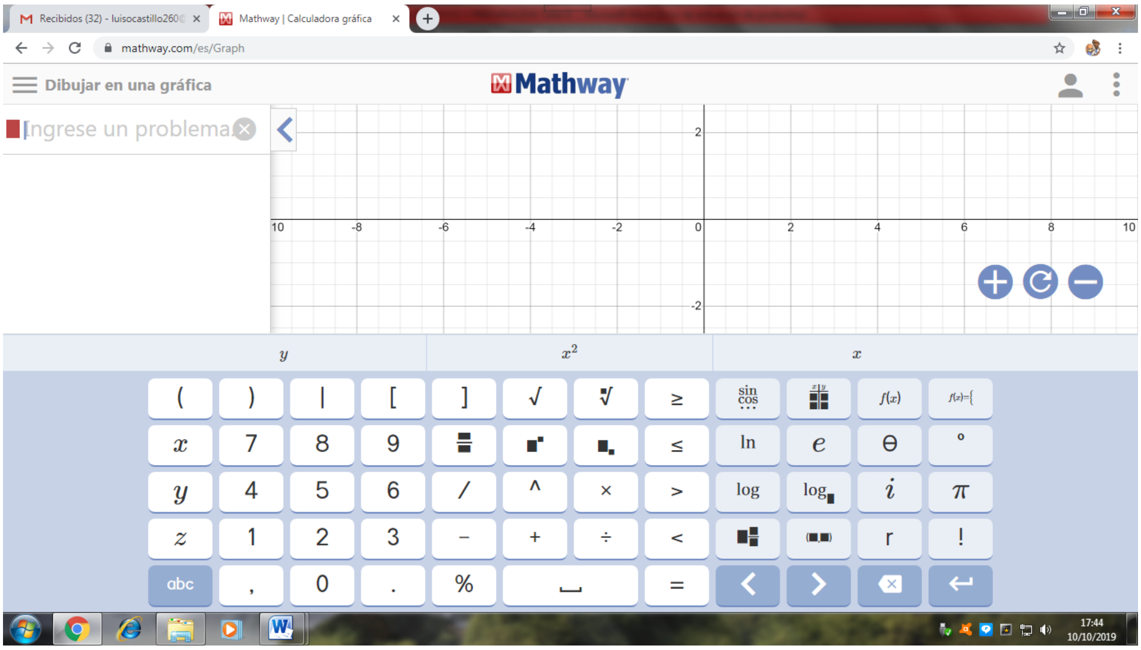
se puede aplicar el criterio de la segunda derivada como se indica a continuación.

Punto	$(-1, -2)$	$(1, 2)$	$(0, 0)$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(0) = 0$
Conclusión	Mínimo relativo	Máximo relativo	Falla de la prueba

Como el criterio de la segunda derivada no decide en $(0, 0)$, es posible utilizar el criterio de la primera derivada y observar que f aumenta hacia la izquierda y hacia la derecha de $x = 0$. De tal modo, $(0, 0)$ no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo (aun cuando la gráfica tiene una recta tangente horizontal en este punto). La gráfica de f se muestra en la figura 3.32.



(0, 0) no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo
Figura 3.32



Puede verificar su grafica con la herramienta virtual

Grafica de funciones online

https://www.mathway.com/es/Graph