TALLER 5

EJEMPLO 2 Derivación implícita

Encontrar dy/dx dado que $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$.

Solución

NOTA Observar que en el ejemplo 2 la derivación implícita puede producir una expresión para dy/dx en la que aparezcan a la vez x y y.

1. Derivar los dos miembros de la ecuación respecto de x.

$$\frac{d}{dx}[y^3 + y^2 - 5y - x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$\frac{d}{dx}[y^3] + \frac{d}{dx}[y^2] - \frac{d}{dx}[5y] - \frac{d}{dx}[x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

2. Agrupar los términos con dy/dx en la parte izquierda y pasar todos los demás al lado derecho.

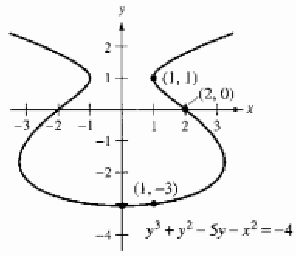
$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} = 2x$$

3. Factorizar dy/dx en la parte izquierda.

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 2y - 5) = 2x$$

4. Despejar dy/dx dividiendo entre $(3y^2 + 2y - 5)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$



Para ver cómo usar la *derivación implícita*, considerar la gráfica de la figura 2.27. En ella se puede observar que y no es una función de x. A pesar de ello, la derivada determina-

EJEMPLO 4 Cálculo de la pendiente de una gráfica implícita

Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de

$x^2 + 4y^2 = 4$

en el punto $\left(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$. Ver la figura 2.29

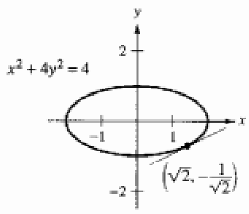


Figura 2.29

Solución

$x^2 + 4y^2 = 4$ — Ecuación original.

$2x + 8y\dfrac{dy}{dx} = 0$ — Derivar respecto a x.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x}{8y} = \dfrac{-x}{4y}$ — Despejar términos con $\frac{dy}{dx}$.

Por tanto, en $\left(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$, la pendiente es

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\sqrt{2}}{-4/\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}.$ — Evaluar $\frac{dy}{dx}$ cuando $x = \sqrt{2}$, y $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

NOTA Para observar las ventajas de la derivación implícita, intentar rehacer el ejemplo 4 manejando la función explícita $y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$.

TALLER 5

EJEMPLO 5 Cálculo de la pendiente de una gráfica implícita

Calcular la pendiente de la gráfica de $3(x^2+y^2)^2 = 100xy$ en el punto $(3, 1)$.

Solución

$$\frac{d}{dx}[3(x^2+y^2)^2] = \frac{d}{dx}[100xy]$$

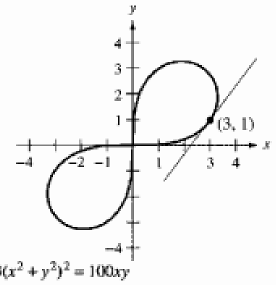
$$3(2)(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right) = 100\left[x\frac{dy}{dx}+y(1)\right]$$

$$12y(x^2+y^2)\frac{dy}{dx} - 100x\frac{dy}{dx} = 100y - 12x(x^2+y^2)$$

$$[12y(x^2+y^2) - 100x]\frac{dy}{dx} = 100y - 12x(x^2+y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{100y - 12x(x^2+y^2)}{-100x + 12y(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{25y - 3x(x^2+y^2)}{-25x + 3y(x^2+y^2)}$$



$3(x^2+y^2)^2 = 100xy$

Lemniscata
Figura 2.30

En el punto $(3, 1)$, la pendiente de la gráfica es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{25(1) - 3(3)(3^2+1^2)}{-25(3) + 3(1)(3^2+1^2)} = \frac{25-90}{-75+30} = \frac{-65}{-45} = \frac{13}{9}$$

como muestra la figura 2.30. Esta gráfica se denomina **lemniscata**.

¡
Derivada implicita

TALLER 5

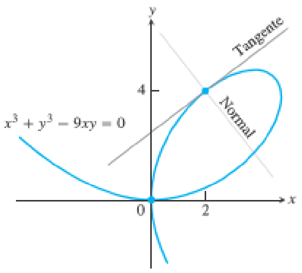


FIGURA 3.41 El ejemplo 4 muestra cómo encontrar las ecuaciones para la tangente y la normal del *folium* de Descartes en (2, 4).

EJEMPLO 4 Tangente y normal al folium de Descartes

Mostrar que el punto (2, 4) está en la curva $x^3 + y^3 - 9xy = 0$. Después, encontrar la tangente y la normal a la curva en ese punto (figura 3.41).

Solución El punto (2, 4) está en la curva, ya que sus coordenadas satisfacen la ecuación dada para ésta: $2^3 + 4^3 - 9(2)(4) = 8 + 64 - 72 = 0$.

Para encontrar la pendiente de la curva en (2, 4), primero usamos diferenciación implícita para encontrar una fórmula para dy/dx:

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(9xy) = \frac{d}{dx}(0) \qquad \text{Diferenciar ambos lados con respecto a } x.$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 9\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) = 0 \qquad \text{Tratar } xy \text{ como un producto y a } y \text{ como una función de } x.$$

$$(3y^2 - 9x)\frac{dy}{dx} + 3x^2 - 9y = 0$$

$$3(y^2 - 3x)\frac{dy}{dx} = 9y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}. \qquad \text{Resolver para } dy/dx.$$

Después evaluamos la derivada en $(x, y) = (2, 4)$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)} = \left.\frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}\right|_{(2,4)} = \frac{3(4) - 2^2}{4^2 - 3(2)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Tema :

DERIVADAS IMPLICITAS

Si una ecuación contiene una combinación de dos variables estas se pueden derivar simultáneamente para obtener la derivada total esta forma de derivar se conoce como derivada implícita y se puede obtener de dos formas.

Un aspecto importante que se tiene que saber es que cuando se deriva la "y" se le agrega y^l y esta es la que se despeja.

- Derivar "Y" y derivar.
- Derivar toda al mismo tiempo y después despejar "Y.

Ejercicios:

$$7x^2 + 6y^3 - 10x^2 = 4xy^2$$

$$Dx(7x^2) + Dx(6y^3) - Dx(10x^2) = Dx(4xy^2)$$

$$14x + 18y^2y^l - 20x = \left[4x * Dx(y^2) + y^2 * Dx(4x)\right]$$

$$18y^2y^l - 6x = 8xyy^l + 4y^2$$

$$18y^2y^l - 8xyy^l = 4y^2 + 6x$$

$$y^l(18y^2 - 8xy) = 4y^2 + 6x$$

$$y^l = \frac{4y^2 + 6x}{18y^2 - 8xy}$$

1. $x^2 + y^2 = 16$

<u>Solución:</u>

$$x^2 + y^2 = 16,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}(16) \qquad \{\text{aplicando } d/dx \text{ en ambos miembros de la igualdad}\},$$

$$\Rightarrow \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \{\text{efectuando las derivadas indicadas}\};$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad \{\text{despejando } dy/dx\}.$$

2. $x^3 + y^3 = 8xy$

<u>Solución:</u>

$$x^3 + y^3 = 8xy,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(x^3 + y^3\right) = \frac{d}{dx}(8xy) \qquad \{\text{aplicando } d/dx \text{ en ambos miembros de la igualdad}\},$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 8y + 8x\frac{dy}{dx} \qquad \{\text{efectuando las derivadas indicadas}\};$$

$$\therefore \quad 3y^2\frac{dy}{dx} - 8x\frac{dy}{dx} = 8y - 3x^2 \Leftrightarrow \left(3y^2 - 8x\right)\frac{dy}{dx} = 8y - 3x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8y - 3x^2}{3y^2 - 8x} \qquad \{\text{despejando } dy/dx\}.$$

3. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

<u>Solución:</u>

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow x^{-1} + y^{-1} = 1,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(x^{-1} + y^{-1}\right) = \frac{d}{dx}(1) \qquad \{\text{aplicando } d/dx \text{ en ambos miembros de la igualdad}\},$$

$$\Rightarrow \quad -2x^{-2} - 2y^{-2}\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow x^{-2} + y^{-2}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \{\text{efectuando las derivadas indicadas}\};$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-2}}{y^{-2}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2} \qquad \{\text{despejando } dy/dx\}.$$

4. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$

Solución:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \Leftrightarrow x^{1/2} + y^{1/2} = 4,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(x^{1/2} + y^{1/2}\right) = \frac{d}{dx}(4) \qquad \{\text{aplicando } d/dx \text{ en ambos miembros de la igualdad}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2}\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow x^{-1/2} + y^{-1/2}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \{\text{efectuando las derivadas indicadas}\};$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-1/2}}{y^{-1/2}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \qquad \{\text{despejando } dy/dx\}.$$

5. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xy} = 4y^2$

Solución:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xy} = 4y^2 \Leftrightarrow x^{1/3}\left[1 + y^{1/3}\right] = 4y^2,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(x^{1/3}\left[1 + y^{1/3}\right]\right) = \frac{d}{dx}(4y^2) \qquad \{\text{aplicando } d/dx \text{ en ambos miembros de la igualdad}\},$$

$$\Rightarrow \quad x^{1/3}\left[\frac{1}{3}y^{-2/3}\frac{dy}{dx}\right] + \frac{1}{3}x^{-2/3}\left[1 + y^{1/3}\right] = 8y\frac{dy}{dx} \qquad \{\text{efectuando las derivadas indicadas}\},$$

$$\Rightarrow \quad 24y\frac{dy}{dx} - x^{1/3}y^{-2/3}\frac{dy}{dx} = x^{-2/3}\left[1 + y^{1/3}\right] \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}\left(24y - x^{1/3}y^{-2/3}\right) = x^{-2/3}\left[1 + y^{1/3}\right];$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^{-2/3}\left[1 + y^{1/3}\right]}{24y - x^{1/3}y^{-2/3}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^{-2/3}\left[1 + y^{1/3}\right]}{y^{-2/3}\left[24y^{5/3} - x^{1/3}\right]} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^{2/3}\left[1 + y^{1/3}\right]}{x^{2/3}\left[24y^{5/3} - x^{1/3}\right]}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^{2/3} + y}{24x^{2/3}y^{5/3} - x} \qquad \{\text{despejando } dy/dx\}.$$

Ejercicios resueltos 6.

6.1) Determinemos $\frac{dy}{dx}$, dada la ecuación $2x^2 - 4x + 3 = y^3 + 5y^2 + 4.$

Solución.

Para calcular la derivada pedida, diferenciemos ambos miembros de la ecuación con respecto de x y despejemos $D_x(y)$, así:

$$D_x\left(2x^2-4x+3\right)=D_x\left(y^3+5y^2+y\right)$$

$$D_x\left(2x^2\right)-D_x\left(4x\right)+D_x\left(3\right)=D_x\left(y^3\right)+D_x\left(5y^2\right)+D_x\left(y\right)$$

$$4x^2-4+0=3y^2D_x\left(y\right)+10yD_x\left(y\right)+D_x\left(y\right)$$

$$4x^2-4=\left(3y^2+10y+1\right)D_x\left(y\right)$$

$$D_x\left(y\right)=\frac{4x^2-4}{3y^2+10y+1}$$

Derivadas de orden superior

También podemos usar la diferenciación implícita para encontrar derivadas de orden superior. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 5 Encontrar implícitamente una segunda derivada

Encontrar d^2y/dx^2 si $2x^3 - 3y^2 = 8$.

Solución Para empezar, derivamos ambos lados de la ecuación con respecto a x para encontrar $y' = dy/dx$.

$$\frac{d}{dx}\left(2x^3 - 3y^2\right) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$6x^2 - 6yy' = 0 \qquad \text{Tratar } y \text{ como una función de } x.$$

$$x^2 - yy' = 0$$

$$y' = \frac{x^2}{y}, \qquad \text{cuando } y \neq 0 \quad \text{Resolver para } y'.$$

Ahora aplicamos la regla del cociente para encontrar y''.

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\cdot y'$$

Finalmente, sustituimos $y' = x^2/y$ para expresar y'' en términos de x y y.

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}, \qquad \text{cuando } y \neq 0$$

■

TEOREMA 2 Propiedades de los logaritmos

Para cualquier número $a > 0$ y $x > 0$, el logaritmo natural satisface las reglas siguientes:

1. *Regla del producto:* $\ln ax = \ln a + \ln x$
2. *Regla del cociente:* $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$
3. *Regla del recíproco:* $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ Regla 2 con $a = 1$
4. *Regla de la potencia:* $\ln x^r = r \ln x$ r racional

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \qquad u > 0 \qquad (1)$$

EJEMPLO 1 Desarrollo de expresiones logarítmicas

a) $\ln \frac{10}{9} = \ln 10 - \ln 9$ Propiedad 4.

b) $\ln \sqrt{3x+2} = \ln(3x+2)^{1/2}$ Reescribir con exponente racional.

$= \frac{1}{2}\ln(3x+2)$ Propiedad 3.

c) $\ln \frac{6x}{5} = \ln(6x) - \ln 5$ Propiedad 4.

$= \ln 6 + \ln x - \ln 5$ Propiedad 2.

d) $\ln \frac{(x^2+3)^2}{x\sqrt[3]{x^2+1}} = \ln(x^2+3)^2 - \ln\left(x\sqrt[3]{x^2+1}\right)$

$= 2\ln(x^2+3) - [\ln x + \ln(x^2+1)^{1/3}]$

$= 2\ln(x^2+3) - \ln x - \ln(x^2+1)^{1/3}$

$= 2\ln(x^2+3) - \ln x - \frac{1}{3}\ln(x^2+1)$

EJEMPLO 3 **Derivación de funciones logarítmicas**

a) $\frac{d}{dx}[\ln(2x)] = \frac{u'}{u} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$ $\quad u = 2x$

b) $\frac{d}{dx}[\ln(x^2+1)] = \frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2+1}$ $\quad u = x^2 + 1$

c) $\frac{d}{dx}[x \ln x] = x\left(\frac{d}{dx}[\ln x]\right) + (\ln x)\left(\frac{d}{dx}[x]\right)$ Regla del producto.

$= x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$

d) $\frac{d}{dx}[(\ln x)^3] = 3(\ln x)^2 \frac{d}{dx}[\ln x]$ Regla de la cadena.

$= 3(\ln x)^2 \frac{1}{x}$

EJEMPLO 5 **Propiedades de los logaritmos como ayuda en la derivación**

Derivar $f(x) = \ln \dfrac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}$.

Solución

$$f(x) = \ln \frac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}$$ Escribir la función original.

$$= \ln x + 2\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2x^3-1)$$ Reescribir antes de derivar.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{6x^2}{2x^3-1}\right)$$ Derivar.

$$= \frac{1}{x} + \frac{4x}{x^2+1} - \frac{3x^2}{2x^3-1}$$ Simplificar.

EJEMPLO 6 **Derivación logarítmica**

Hallar la derivada de

$$y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq 2.$$

Solución Notar que $y > 0$ para todo $x \neq 2$. Así, $\ln y$ está definido. Iniciar aplicando el logaritmo natural en los dos miembros de la ecuación. Y a continuación aplicar las propiedades de los logaritmos y la derivación implícita. Por último, despejar y'.

$$y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq 2$$ Escribir la ecuación original.

$$\ln y = \ln \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}$$ Aplicar logaritmo natural en ambos lados.

$$\ln y = 2\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$ Propiedades de los logaritmos.

$$\frac{y'}{y} = 2\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$$ Derivar.

$$= \frac{2}{x-2} - \frac{x}{x^2+1}$$ Simplificar.

$$y' = y\left(\frac{2}{x-2} - \frac{x}{x^2+1}\right)$$ Despejar y'.

$$= \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}\left[\frac{x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)}\right]$$ Sustituir y.

$$= \frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{(x^2+1)^{3/2}}$$ Simplificar.

Determinar dy/dx si

$$y = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}, \qquad x > 1.$$

Solución Aplicamos el logaritmo natural en ambos lados y simplificamos el resultado de acuerdo con las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1} \\
&= \ln\left((x^2+1)(x+3)^{1/2}\right) - \ln(x-1) && \text{Regla 2} \\
&= \ln(x^2+1) + \ln(x+3)^{1/2} - \ln(x-1) && \text{Regla 1} \\
&= \ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x+3) - \ln(x-1). && \text{Regla 3}
\end{aligned}$$

Luego derivamos ambos lados con respecto a x, utilizando la ecuación (1) en el lado izquierdo:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}.$$

Ahora despejamos dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\right).$$