DERIVADAS SIMPLES

Teorema 1. ***Derivada de una función constante.***

Si $f(x)=c,$ donde *c* es una constante, entonces:

$$\boxed{f'(x)=0}$$

Ejemplo.

Si $f(x)=6,$ entonces, $f'(x)=0.$

Teorema 2. ***Derivada de una función potencial.***

Si $f(x)=x^n,$ donde *n* es un número racional, entonces:

$$\boxed{D_x\left(x^n\right)=nx^{n-1}}$$

Ejemplo.

Si $f(x)=x^6,$ entonces, $f'(x)=6x^5.$

Teorema 3. ***Derivada del producto de una función por una constante.***

Si *g* es una función definida por $g(x)=c\cdot f(x),$ donde *f* es una función y *c* una constante, entonces:

$$\boxed{g'(x)=c\cdot f'(x)}$$

Ejemplo.

Si $f(x)=4x^8,$ entonces, $D_x\left(4x^8\right)=4\cdot D_x\left(x^8\right)=4\cdot 8x^7=32x^7.$

A partir del resultado obtenido en el ejemplo anterior, podemos enunciar el siguiente teorema.

Ejercicio $f(x) = x^6$

Sol: $f'(x) = 6x^{6-1} = \boxed{6x^5}$

Ejercicio $f(x) = x^3$

Sol: $f'(x) = 3x^{3-1} = \boxed{3x^2}$

Ejercicio $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$

Sol: $f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5\sqrt{x^3}}{2} = \boxed{\frac{5x\sqrt{x}}{2}}$

Ejercicio $f(x) = x^{-7}$

Sol: $f'(x) = -7x^{-7-1} = -7x^{-8} = \boxed{\frac{-7}{x^8}}$

Ejercicio $f(x) = x^{\frac{-4}{7}}$

Sol: $f'(x) = \frac{-4}{7}x^{\frac{-4}{7}-1} = \frac{-4}{7}x^{\frac{-4}{7}-\frac{7}{7}} = \frac{-4}{7}x^{\frac{-11}{7}} = \frac{-4}{7x^{\frac{11}{7}}} = \frac{-4}{7\sqrt[7]{x^{11}}} = \boxed{\frac{-4}{7x\sqrt[7]{x^4}}}$

Ejercicio $f(x) = x$

Sol: $f'(x) = 1x^{1-1} = 1x^0 = \boxed{1}$

Ejercicio $f(x) = \frac{1}{x^3}$

Sol: $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ $f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = \boxed{\frac{-3}{x^4}}$

Ejercicio $f(x) = \frac{1}{x^{-4}}$

Sol: $f(x)=\dfrac{1}{x^{-4}}=x^{4}\quad f'(x)=4x^{4-1}=\boxed{4x^{3}}$

Ejercicio $f(x)=\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

Sol: $f(x)=\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}=x^{-\frac{3}{2}}\quad f'(x)=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}}=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\dfrac{3}{2x^{\frac{5}{2}}}=\boxed{\dfrac{-3}{2\sqrt{x^{5}}}}$

Ejercicio $f(x)=\sqrt{x}$

Sol: $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\quad f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

<!--[endif]-->

Ejercicio $f(x)=\sqrt[5]{x}$

Sol: $f(x)=\sqrt[5]{x}=x^{\frac{1}{5}}\quad f'(x)=\dfrac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}=\dfrac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-\frac{5}{5}}=\dfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}=\dfrac{1}{5x^{\frac{4}{5}}}=\boxed{\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^{4}}}}$

Ejercicio $f(x)=\sqrt[5]{x^{4}}$

Sol: $f(x)=\sqrt[5]{x^{4}}=x^{\frac{4}{5}}\quad f'(x)=\dfrac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1}=\dfrac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-\frac{5}{5}}=\dfrac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}=\dfrac{4}{5x^{\frac{1}{5}}}=\boxed{\dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}}}$

Ejercicio $f(x)=\sqrt[4]{x^{5}}$

Sol: $f(x)=\sqrt[4]{x^{5}}=x^{\frac{5}{4}}\quad f'(x)=\dfrac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1}=\dfrac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-\frac{4}{4}}=\dfrac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}=\boxed{\dfrac{5\sqrt[4]{x}}{4}}$

Ejercicio $f(x)=\sqrt[4]{x^{11}}$

Sol: $f(x)=\sqrt[4]{x^{11}}=x^{\frac{11}{4}}\quad f'(x)=\dfrac{11}{4}x^{\frac{11}{4}-1}=\dfrac{11}{4}x^{\frac{11}{4}-\frac{4}{4}}=\dfrac{11}{4}x^{\frac{7}{4}}=\dfrac{11}{4}\sqrt[4]{x^{7}}=\boxed{\dfrac{11x\sqrt[4]{x^{3}}}{4}}$

Ejercicio $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Sol: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=x^{-\frac{1}{2}}\quad f'(x)=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=\dfrac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}}=\boxed{\dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}}}$

Ejercicio $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$

Sol: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{5}}}=x^{-\frac{1}{5}}\quad f'(x)=-\dfrac{1}{5}x^{-\frac{1}{5}-\frac{5}{5}}=-\dfrac{1}{5}x^{-\frac{6}{5}}=\dfrac{-1}{5x^{\frac{6}{5}}}=\dfrac{-1}{5\sqrt[5]{x^6}}=\boxed{\dfrac{-1}{5x\sqrt[5]{x}}}$

Ejercicio $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$

Sol:

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}=\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}=x^{-\frac{3}{2}}\quad f'(x)=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}}=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=\dfrac{-3}{2x^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{-3}{2\sqrt{x^5}}=\boxed{\dfrac{-3}{2x^2\sqrt{x}}}$

Ejercicio $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

Sol: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\quad f'(x)=\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

Ejercicio $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^7}}=\dfrac{1}{x^{\frac{7}{3}}}=x^{-\frac{7}{3}}$

Sol: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^7}}\quad f'(x)=-\dfrac{7}{3}x^{-\frac{7}{3}-1}=-\dfrac{7}{3}x^{-\frac{7}{3}-\frac{3}{3}}=-\dfrac{7}{3}x^{-\frac{10}{3}}=\dfrac{-7}{3x^{\frac{10}{3}}}=\dfrac{-7}{3\sqrt[3]{x^{10}}}=\boxed{\dfrac{-7}{3x^3\sqrt[3]{x}}}$

Teorema 4. ***Derivada del [producto](#) de una función potencial por una constante.***

Si $f(x)=c\cdot x^n$, donde n es un número entero positivo y c una constante, entonces:

$$\boxed{D_x\left(c\cdot x^n\right)=c\cdot D_x\left(x^n\right)=c\cdot n\,x^{n-1}}$$

Teorema 5. ***Derivada de una adición de funciones.***

Si $f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots, f_n$ son funciones y si *f* es una función definida por:
$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ y si
$f_1'(x), f_2'(x), f_3'(x), f_4', \ldots, f_n'(x)$ existen, entonces:

$$\boxed{f'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+f_3'(x)+f_4'(x)+\ldots f_n'(x)}$$

Ejemplo.

Determine $f'(x)$ si $f(x)=4x^4-3x^3-x+5.$

$$f'(x)=D_x\left[4x^4-3x^3-x+5\right]=D_x\left(4x^4\right)-D_x\left(3x^3\right)-D_x(x)+D_x(5)$$
$$=4\cdot D_x\left(x^4\right)-3\cdot D_x\left(x^3\right)-D_x(x)+D_x(5)=4\cdot 4x^{3-1}-3\cdot 3x^{3-1}-x^{1-1}+0$$
$$=16x^3-9x^2-1$$

DERIVADAS COMPUESTAS

Teorema 6. *Derivada de un producto de funciones.*

Si *f* y *g* son funciones y *h* una función definida por $h(x)=f(x)\cdot g(x),$ y si
$f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces:

$$\frac{d}{dx}\left[h(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=f(x)\cdot\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]+g(x)\cdot\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$$

EJEMPLO 7 Uso de la regla del producto

Encontrar la derivada de

$$y=\frac{1}{x}\left(x^2+\frac{1}{x}\right).$$

Solución Aplicamos la regla del producto con $u = 1/x$ y $v = x^2 + (1/x)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\right] &= \frac{1}{x}\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\ &= 2-\frac{1}{x^3}-1-\frac{1}{x^3}\\ &= 1-\frac{2}{x^3}.\end{aligned}$$

$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ y $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$ por Ejemplo 3, sección 2.7

EJEMPLO 9 Dos métodos para derivar un producto

Encontrar la derivada de $y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$.

Solución

(a) De acuerdo con la regla del producto, con $u = x^2 + 1$ y $v = x^3 + 3$, encontramos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[(x^2+1)(x^3+3)\right] &= (x^2+1)(3x^2)+(x^3+3)(2x)\\ &= 3x^4+3x^2+2x^4+6x\\ &= 5x^4+3x^2+6x.\end{aligned}$$

(b) Este producto en particular también puede derivarse (quizás mejor) multiplicando la expresión original para y y derivando la función polinomial resultante:

$$y=(x^2+1)(x^3+3)=x^5+x^3+3x^2+3$$

$$\frac{dy}{dx}=5x^4+3x^2+6x.$$

Ejemplo.

Sea $h(x)=(2x^3+2)(x^2-x)$, determine $h'(x)$.

Apliquemos el teorema 7:

$$h'(x)=\left(2x^3+2\right)\cdot D_x\left(x^2-x\right)+\left(x^2-x\right)\cdot D_x\left(2x^3+2\right)=\left(2x^3+2\right)\left(2x-1\right)+\left(x^2-x\right)\left(6x^2\right)$$

$$=4x^4-2x^3+4x-2+6x^4-6x^3=10x^4-8x^3+4x-2$$

Teorema 7. *Derivada de un cociente de funciones.*

Si *f* y *g* son funciones y *h* una función definida por $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, donde $g(x)\neq 0$ y si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces:

$$\boxed{D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\cdot D_x\left[f(x)\right]-f(x)\cdot D_x\left[g(x)\right]}{\left[g(x)\right]^2}}$$

EJEMPLO 10 Uso de la regla del cociente

Encontrar la derivada de

$$y=\frac{t^2-1}{t^2+1}.$$

Solución

Aplicamos la regla del cociente con $u=t^2-1$ y $v=t^2+1$:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{(t^2+1)\cdot 2t-(t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v(du/dt)-u(dv/dt)}{v^2}$$

$$=\frac{2t^3+2t-2t^3+2t}{(t^2+1)^2}$$

$$=\frac{4t}{(t^2+1)^2}.$$

Ejemplo.

Calcule $D_x\left(\dfrac{3x^2}{x+3}\right).$

Debemos aplicar el teorema 8:

$$D_x\left(\frac{3x^2}{x+3}\right)=\frac{(x+3)\cdot D_x\left(3x^2\right)-3x^2\cdot D_x(x+3)}{(x+3)^2}=\frac{(x+3)(6x)-3x^2\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{6x^2+18x-3x^2}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{3x^2+18x}{(x+3)^2}$$

Ejercicio $f(x)=\dfrac{2x^3+5}{4x^2+7}$

Solución:

$$f'(x)=\frac{6x^2(4x^2+7)-(2x^3+5)8x}{(4x^2+7)^2}=\frac{24x^4+42x^2-16x^4-40x}{(4x^2+7)^2}=\frac{8x^4+42x^2-40x}{(4x^2+7)^2}=\frac{2x(4x^3+21x-20)}{(4x^2+7)^2}$$

Ejercicio $f(x)=\dfrac{4x^3-5x^2}{3x^2-4}$

Solución:

$$f'(x)=f(x)=\frac{(12x^2-10x)(3x^2-4)-(4x^3-5x^2)6x}{(3x^2-4)^2}=\frac{36x^4-48x^2-30x^3+40x-24x^4+30x^3}{(3x^2-4)^2}=$$

$$=\frac{12x^4-48x^2+40x}{(3x^2-4)^2}=\boxed{\frac{4x(3x^3-12x+10)}{(3x^2-4)^2}}$$

Ejercicio $f(x)=\dfrac{x^{-2}+x^4-6}{3x^3+4x^4}$

Solución: $f'(x)=\dfrac{3x^7+96x^4+54x^3-28x-18}{x^7(4x+3)^2}$

Ejercicio $f(x)=\dfrac{3x^2+2x+3}{3x^2+7}$

Solución: $f'(x)=\dfrac{-2(3x^2-12x-7)}{(3x^2+7)^2}$

Ejercicio $f(x)=\dfrac{x^{-2}+x^{5}-6}{x^{4}+x^{-3}}$

Solución: $f'(x)=\dfrac{x^{14}+24x^{9}+2x^{7}-18x^{2}+1}{(x^{7}+1)^{2}}$

Después usamos las reglas de la suma y de la potencia:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4}\\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 13 Elección de la regla a usar

En lugar de usar la regla del cociente para encontrar la derivada de

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4},$$

expandimos el numerador y dividimos entre x^4:

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3-3x^2+2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}.$$

Teorema 8. *Derivada de una función compuesta (Regla de la Cadena).*

Si g es una función diferenciable en x y la función h es diferenciable en $g(x)$, entonces, la función compuesta $f(x)=(h\circ g)(x)$ es diferenciable en x, y su derivada es:

$$\boxed{f'(x)=(h\circ g)'(x)=h'(g(x))g'(x)}$$

Ejemplo.

Sean $f(x)=x^3$ y $g(x)=3x^2+4x-9.$ Determinar $(f\circ g)'.$

La función $f\circ g$ está definida por $(f\circ g)(x)=f(g(x))=(3x^2+4x-9)^3.$

Para aplicar la regla de la cadena necesitamos calcular $f'(g(x))$ y $g'(x).$ Como $f(x)=x^3,$ entonces, $f'(x)=3x^2,$ y así: $f'(g(x))=3(g(x))^2=3(3x^2+4x-9)^2.$ Además, como $g(x)=3x^2+4x-9,$ luego, $g'(x)=6x+4.$

Por lo tanto, $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)=3(3x^2+4x-4)^2(6x+4).$

Calcular la derivada de numerosas funciones aplicando la fórmula (B) es muy laborioso y complicado, por tal razón, a continuación se suministra la siguiente tabla:

EJEMPLO 2

La función

$$y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$$

es la composición de $y = u^2$ y $u = 3x^2 + 1$. Al calcular las derivadas, vemos que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1)\cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x.\end{aligned}$$

Al calcular la derivada a partir de la fórmula expandida, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(9x^4 + 6x^2 + 1\right) \\ &= 36x^3 + 12x.\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Aplicación de la regla de la cadena de potencias

(a) $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)^7 &= 7(5x^3 - x^4)^6\frac{d}{dx}\left(5x^3 - x^4\right) \\ &= 7(5x^3 - x^4)^6(5\cdot 3x^2 - 4x^3) \\ &= 7(5x^3 - x^4)^6(15x^2 - 4x^3)\end{aligned}$$

Regla de la cadena de potencias con $u = 5x^3 - x^4, n = 7$

(b) $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3x-2}\right) &= \frac{d}{dx}(3x-2)^{-1} \\ &= -1(3x-2)^{-2}\frac{d}{dx}(3x-2) \\ &= -1(3x-2)^{-2}(3) \\ &= -\frac{3}{(3x-2)^2}\end{aligned}$$

Regla de la cadena de potencias con $u = 3x - 2, n = -1$

EJEMPLO 14 Determinación de derivadas de orden superior

Las primeras cuatro derivadas de $y = x^3 - 3x^2 + 2$ son

Primera derivada: $y' = 3x^2 - 6x$

Segunda derivada: $y'' = 6x - 6$

Tercera derivada: $y''' = 6$

Cuarta derivada: $y^{(4)} = 0.$

La función tiene derivadas de todos los órdenes; la quinta derivada y todas las siguientes son cero.