Temas : Límites de funciones. Propiedades de los límites, Límites y formas indeterminadas $\frac{0}{0}$, $\frac{k}{0}$, $k \neq 0$ Funciones racionales, asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. Límites de funciones trigonométricas

Leyes de límites

Usamos las siguientes propiedades de límites, llamadas *Leyes de Límites*, para calcular límites.

LEYES DE LÍMITES

Suponga que c es una constante y que existen los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

Entonces

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$ — Límite de una suma
2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$ — Límite de una diferencia
3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$ — Límite de un múltiplo constante
4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$ — Límite de un producto
5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{si } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ — Límite de un cociente

Estas cinco leyes se pueden expresar verbalmente como sigue:

1. El límite de la suma de límites es la suma de los límites. — Límite de una suma
2. El límite de una diferencia es la diferencia de los límites. — Límite de una diferencia
3. El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función. — Límite de un múltiplo constante
4. El límite de un producto es el producto de los límites. — Límite de un producto
5. El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea 0). — Límite de un cociente

Es fácil creer que estas propiedades son verdaderas. Por ejemplo, si $f(x)$ es cercana a L y $g(x)$ es cercana a M, es razonable concluir que $f(x) + g(x)$ es cercana a $L + M$. Esto nos da una base intuitiva para pensar que la Ley 1 es verdadera.

Si usamos la Ley 4 (Límite de un Producto) repetidamente con $g(x) = f(x)$, obtenemos la siguiente Ley 6 para el límite de una potencia. Una ley similar se cumple para raíces.

LEYES DE LÍMITES

6. $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$ donde n es un entero positivo — Límite de una potencia
7. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ donde n es un entero positivo — Límite de una raíz

[Si n es par, suponemos que $\lim_{x\to a} f(x) > 0$.]

En palabras, estas leyes dicen lo siguiente:

6. El límite de una potencia es la potencia del límite. — Límite de una potencia
7. El límite de una raíz es la raíz del límite. — Límite de una raíz

▼ Aplicación de leyes de límites

Al aplicar las Leyes de Límites, necesitamos usar cuatro límites especiales.

ALGUNOS LÍMITES ESPECIALES

1. $\lim_{x\to a} c = c$
2. $\lim_{x\to a} x = a$
3. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ donde n es un entero positivo
4. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un entero positivo $a > 0$

Los Límites Especiales 1 y 2 son intuitivamente obvios; viendo las gráficas de $y = c$ y $y = x$ nos convencerá de su validez. Los Límites 3 y 4 son casos especiales de las Leyes de Límites 6 y 7 (Límites de una Potencia y una Raíz).

EJEMPLO 7 Determinación de límites calculando $f(x_0)$

(a) $\lim\limits_{x \to 2} (4) = 4$

(b) $\lim\limits_{x \to -13} (4) = 4$

(c) $\lim\limits_{x \to 3} x = 3$

(d) $\lim\limits_{x \to 2} (5x - 3) = 10 - 3 = 7$

(e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x + 4}{x + 5} = \dfrac{-6 + 4}{-2 + 5} = -\dfrac{2}{3}$

EJEMPLO 2 | Uso de las Leyes de Límites

Evalúe los límites siguientes, y justifique cada paso.

(a) $\lim\limits_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$

(b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUCIÓN

(a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 && \text{Límites de una diferencia y suma} \\ &= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 && \text{Límite de un Múltiplo Constante} \\ &= 2(5^2) - 3(5) + 4 && \text{Límites especiales 3, 2 y 1} \\ &= 39 \end{aligned}$$

(b) Empezamos por usar la Ley 5, pero su uso está totalmente justificado sólo en la etapa final cuando vemos que existen los límites del numerador y denominador y el límite del denominador no es 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} &= \frac{\lim\limits_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim\limits_{x \to -2} (5 - 3x)} && \text{Límite de un Cociente} \\ &= \frac{\lim\limits_{x \to -2} x^3 + 2 \lim\limits_{x \to -2} x^2 - \lim\limits_{x \to -2} 1}{\lim\limits_{x \to -2} 5 - 3 \lim\limits_{x \to -2} x} && \text{Límites de Sumas, Diferencias y Múltiplos Constantes} \\ &= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} && \text{Límites Especiales 3, 2 y 1} \\ &= -\frac{1}{11} \end{aligned}$$

LÍMITES POR SUSTITUCIÓN DIRECTA

Si f es polinomial o una función racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Las funciones con propiedad de sustitución directa se denominan **continuas en** a. Aprenderemos más acerca de funciones continuas cuando estudiemos cálculo.

EJEMPLO 3 | Hallar límites por sustitución directa

Evalúe los siguientes límites.

(a) $\lim_{x \to 3} (2x^3 - 10x - 8)$ **(b)** $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2}$

SOLUCIÓN

(a) La función $f(x) = 2x^3 - 10x - 8$ es polinomial, por lo que podemos hallar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x \to 3} (2x^3 - 10x - 8) = 2(3)^3 - 10(3) - 8 = 16$$

(b) La función $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2}$ es una función racional y $x = -1$ está en su dominio (porque el denominador no es cero para $x = -1$). Entonces, podemos hallar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2} = \frac{(-1)^2 + 5(-1)}{(-1)^4 + 2} = -\frac{4}{3}$$

EJEMPLO 1 Uso de las leyes de los límites

Usar las observaciones $\lim_{x\to c} k = k$ y $\lim_{x\to c} x = c$ (ejemplo 8 de la sección 2.1) y las propiedades de los límites para encontrar los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{x\to c}(x^3 + 4x^2 - 3)$ **(b)** $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{4x^2 - 3}$

Solución

(a) $\lim\limits_{x\to c}(x^3 + 4x^2 - 3) = \lim\limits_{x\to c} x^3 + \lim\limits_{x\to c} 4x^2 - \lim\limits_{x\to c} 3$ Reglas de la suma y la diferencia

$= c^3 + 4c^2 - 3$ Reglas del producto y el múltiplo

(b) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c}(x^4 + x^2 - 1)}{\lim\limits_{x\to c}(x^2 + 5)}$ Regla del cociente

$= \dfrac{\lim\limits_{x\to c} x^4 + \lim\limits_{x\to c} x^2 - \lim\limits_{x\to c} 1}{\lim\limits_{x\to c} x^2 + \lim\limits_{x\to c} 5}$ Reglas de la suma y la diferencia

$= \dfrac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5}$ Regla de la potencia o el producto

(c) $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{\lim\limits_{x\to -2}(4x^2 - 3)}$ Regla de la potencia con $r/s = \frac{1}{2}$

$= \sqrt{\lim\limits_{x\to -2} 4x^2 - \lim\limits_{x\to -2} 3}$ Regla de la diferencia

$= \sqrt{4(-2)^2 - 3}$ Reglas del producto y del múltiplo

$= \sqrt{16 - 3}$

$= \sqrt{13}$

Hallar límites usando álgebra y las Leyes de Límites

Como vimos en el Ejemplo 3, la evaluación de límites por sustitución directa es fácil pero no todos los límites pueden evaluarse de este modo. En realidad, la mayor parte de las situaciones en las que los límites son útiles exigen que trabajemos más para evaluar el límite. Los tres ejemplos siguientes ilustran cómo podemos usar álgebra para hallar límites.

EJEMPLO 4 | Hallar un límite por cancelación de un factor común

Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$. No podemos hallar el límite si sustituimos $x = 1$ porque $f(1)$ no está definida. Ni podemos aplicar la Ley 5 (Límite de un Cociente) porque el límite del denominador es 0. En cambio, necesitamos hacer un poco de álgebra preliminar. Factorizamos el denominador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

El numerador y denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando tomamos el límite cuando x se aproxima a 1, tenemos $x \neq 1$ y entonces $x - 1 \neq 0$. Por lo tanto, podemos cancelar el factor común y calcular el límite como sigue:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} && \text{Factorice}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} && \text{Cancele}\\ &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} && \text{Sea } x\to 1\end{aligned}$$

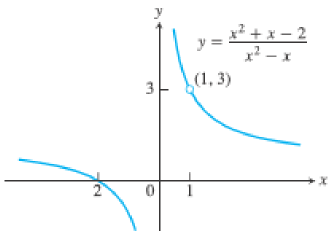
Este cálculo confirma algebraicamente la respuesta que obtuvimos numérica y gráficamente en el Ejemplo 1 de la Sección 13.1.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 11

EJEMPLO 3 Eliminación de un factor común

Evaluar

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}.$$



(a)

Solución No podemos sustituir $x = 1$, ya que obtendríamos un denominador igual a cero. Por otro lado, evaluamos el numerador en $x = 1$ para ver si también es igual a cero. Lo es, así que tiene a $(x - 1)$ como factor común con el denominador. Al eliminar $(x - 1)$ obtenemos una fracción más simple con los mismos valores que la original para $x \neq 1$:

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x}, \qquad \text{si } x \neq 1.$$

Usando la fracción más simple, encontramos por sustitución el límite de estos valores cuando $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3.$$

EJEMPLO 5 | Hallar un límite por simplificación

Evalúe $\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$.

SOLUCIÓN No podemos usar sustitución directa para evaluar este límite, porque el límite del denominador es 0. Entonces, primero simplificamos algebraicamente el límite.

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} \qquad \text{Expanda}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} \qquad \text{Simplifique}$$

$$= \lim_{h \to 0} (6 + h) \qquad \text{Cancele } h$$

$$= 6 \qquad \text{Sea } h \to 0$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 17

EJEMPLO 6 | Hallar un límite por racionalización

Encuentre $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN No podemos aplicar la Ley 5 (Límite de un Cociente) de inmediato, porque el límite del denominador es 0. Aquí, el álgebra preliminar consiste en racionalizar el numerador:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \qquad \text{Racionalice el numerador}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0}(t^2 + 9)} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$$

Este cálculo confirma el que hicimos en el Ejemplo 2 de la Sección 13.1.

Evaluar

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}.$$

Solución Éste es el límite que consideramos en el ejemplo 10 de la sección anterior. No podemos sustituir $x = 0$, y el numerador y el denominador no tienen factores comunes obvios. Podemos crear un factor común multiplicando ambos, numerador y denominador, por la expresión $\sqrt{x^2 + 100} + 10$ (que se obtiene al cambiar el signo que aparece después de la raíz cuadrada). Para racionalizar el numerador utilizamos primero propiedades algebraicas:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} &= \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 100} + 10}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} \\
&= \frac{x^2 + 100 - 100}{x^2\left(\sqrt{x^2 + 100} + 10\right)} \\
&= \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2 + 100} + 10\right)} && \text{Factor común } x^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10}. && \text{Eliminar } x^2 \text{ para } x \neq 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} \\
&= \frac{1}{\sqrt{0^2 + 100} + 10} && \text{Denominador distinto de 0 en } x = 0\text{; sustituir} \\
&= \frac{1}{20} = 0.05.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 | Hallar un límite en el infinito

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$.

SOLUCIÓN Para evaluar el límite en el infinito de una función racional, primero dividimos el numerador y el denominador entre la potencia superior de x que haya en el denominador. (Podemos suponer que $x \neq 0$, porque estamos interesados sólo en valores grandes de x.) En este caso, la potencia superior de x del denominador es x^2, de modo que tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} \qquad \text{Divida numerador y denominador entre } x^2$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{Límite de un cociente}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} - 2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 5 + 4\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}} \qquad \text{Límites de Sumas y Diferencias}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5} \qquad \text{Sea } x \to \infty$$

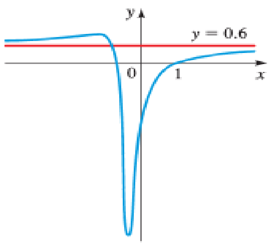


FIGURA 6

Un cálculo similar muestra que el límite cuando $x \to -\infty$ también es $\frac{3}{5}$. La Figura 6 ilustra los resultados de estos cálculos al demostrar la forma en que la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 9

Límites al infinito de funciones racionales

Para determinar el límite de una función racional cuando $x \to \pm\infty$, podemos dividir el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x en el denominador. Lo que pase después dependerá de los grados de los polinomios involucrados.

EJEMPLO 8 El numerador y el denominador tienen el mismo grado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 + (8/x) - (3/x^2)}{3 + (2/x^2)} \qquad \text{Dividir el numerador y el denominador entre } x^2.$$

$$= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{5}{3} \qquad \text{Vea la figura 2.33.}$$

EJEMPLO 9 El grado del numerador es menor que el grado del denominador

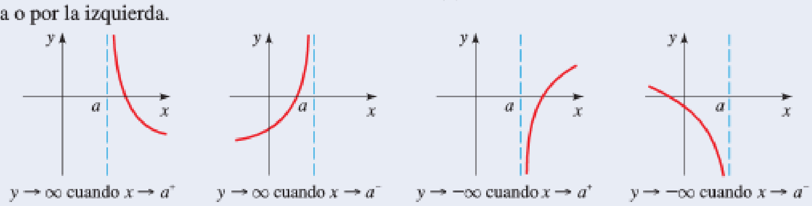
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{11x + 2}{2x^3 - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(11/x^2) + (2/x^3)}{2 - (1/x^3)} \qquad \text{Dividir el numerador y el denominador entre } x^3.$$

$$= \frac{0 + 0}{2 - 0} = 0 \qquad \text{Vea la figura 2.34.}$$

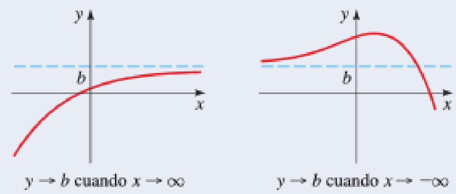
En la siguiente sección se da un ejemplo del caso en donde el grado del numerador es mayor que el grado del denominador (ejemplo 8, sección 2.5).

DEFINICIÓN DE ASÍNTOTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

1. La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si y se aproxima a $\pm\infty$ cuando x se aproxima a a por la derecha o por la izquierda.



2. La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la función $y = f(x)$ si y se aproxima a b cuando x se aproxima a $\pm\infty$.



▼ Asíntotas de funciones racionales

Los métodos del Ejemplo 2 se cumplen sólo para funciones racionales simples. Para graficar unas más complicadas, necesitamos dar una mirada más rigurosa al comportamiento de una función racional cerca de sus asíntotas vertical y horizontal.

EJEMPLO 3 | Asíntotas de una función racional

Grafique $r(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1}$ y exprese el dominio y rango.

SOLUCIÓN

Asíntota vertical: Primero factorizamos el denominador

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{(x - 1)^2}$$

La recta $x = 1$ es una asíntota vertical porque el denominador de r es cero cuando $x = 1$.

EJEMPLO 4 | Asíntotas de una función racional

Encuentre las asíntotas vertical y horizontal de $r(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$.

SOLUCIÓN

Asíntotas verticales: Primero factorizamos

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{(2x - 1)(x + 2)}$$

Este factor es 0 cuando $x = \frac{1}{2}$

Este factor es 0 cuando $x = -2$

Las asíntotas verticales son las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = -2$.

Asíntota horizontal: Los grados del numerador y denominador son iguales, y

$$\frac{\text{coeficiente principal de numerador}}{\text{coeficiente principal de denominador}} = \frac{3}{2}$$

Entonces, la asíntota horizontal es la recta $y = \frac{3}{2}$.

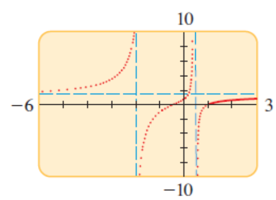


FIGURA 6

$r(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$

La gráfica está trazada usando modo de puntos para evitar líneas extrañas.

Gráfica: Usamos la información que hemos encontrado, junto con algunos valores adicionales, para trazar la gráfica de la Figura 8.

x	y
−15	−0.5
−10	−1.2
−3	1.5
−1	1.0
3	0.6
5	0.5
10	0.3

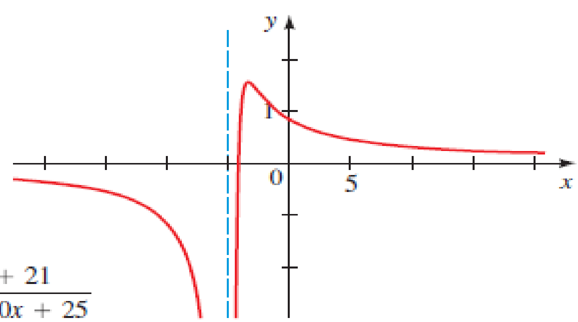


FIGURA 8

$r(x) = \dfrac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$

Dominio y rango: El dominio es $\{x \mid x \neq -5\}$. De la gráfica vemos que el rango es aproximadamente el intervalo $(-\infty, 1.5]$.

EJEMPLO 6 | Gráfica de una función racional

Grafique $r(x) = \dfrac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$ y exprese el dominio y rango.

SOLUCIÓN

Factorice: $y = \dfrac{5x + 21}{(x + 5)^2}$

Punto de intersección *x*: $-\dfrac{21}{5}$, de $5x + 21 = 0$

Punto de intersección *y*: $\dfrac{21}{25}$, porque $r(0) = \dfrac{5 \cdot 0 + 21}{0^2 + 10 \cdot 0 + 25}$

$$= \frac{21}{25}$$

Asíntota vertical: $x = -5$, de los ceros del denominador

Comportamiento cerca de asíntota vertical:

Cuando $x \to$	-5^-	-5^+
el signo de $y = \dfrac{5x + 21}{(x + 5)^2}$ es	$\dfrac{(-)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)}{(+)(+)}$
entonces $y \to$	$-\infty$	$-\infty$

Asíntota horizontal: $y = 0$, porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador

EJEMPLO 8 | Una función racional con una asíntota diagonal

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 3}$.

SOLUCIÓN

Factorice: $y = \dfrac{(x + 1)(x - 5)}{x - 3}$

Puntos de intersección x: -1 y 5, de $x + 1 = 0$ y $x - 5 = 0$

Puntos de intersección y: $\dfrac{5}{3}$, porque $r(0) = \dfrac{0^2 - 4 \cdot 0 - 5}{0 - 3} = \dfrac{5}{3}$

Asíntota horizontal: Ninguna, porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

Asíntota vertical: $x = 3$, del cero del denominador

Comportamiento cerca de asíntota vertical: $y \to \infty$ cuando $x \to 3^-$ y $y \to -\infty$ cuando $x \to 3^+$

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x-3\overline{)x^2-4x-5} \\ \underline{x^2-3x} \\ -x-5 \\ \underline{-x+3} \\ -8 \end{array}$$

Asíntota diagonal: Como el grado del numerador es uno más que el grado del denominador, la función tiene una asíntota diagonal. Dividiendo (vea al margen), obtenemos

$$r(x) = x - 1 - \frac{8}{x - 3}$$

Por lo tanto, $y = x - 1$ es la asíntota diagonal.

Gráfica: Usamos la información que hemos encontrado, junto con algunos valores adicionales, para trazar la gráfica de la Figura 10.

x	y
-2	-1.4
1	4
2	9
4	-5
6	2.33

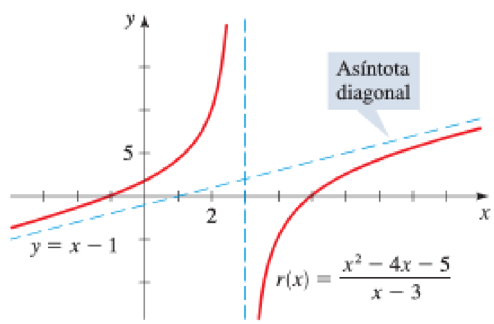


FIGURA 10

EJEMPLO 9 | Comportamiento final de una función racional

Grafique la función racional

$$r(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x - 2}$$

y describa su comportamiento final.

SOLUCIÓN

Factorice: $y = \dfrac{(x + 1)(x^2 - 3x + 3)}{x - 2}$

Puntos de intersección x: -1, de $x + 1 = 0$ (El otro factor del numerador no tiene ceros reales.)

Puntos de intersección y: $-\frac{3}{2}$, porque $r(0) = \dfrac{0^3 - 2\cdot 0^2 + 3}{0 - 2} = -\dfrac{3}{2}$

Asíntota vertical: $x = 2$, del cero del denominador

Comportamiento cerca de asíntota vertical: $y \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$ y $y \to \infty$ cuando $x \to 2^+$

Asíntota horizontal: Ninguna, porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

Comportamiento final: Dividiendo (vea al margen), tenemos

$$\begin{array}{r} x^2 \phantom{{}- 2x^2 + 0x + 3} \\ x - 2\,\overline{)\,x^3 - 2x^2 + 0x + 3} \\ \underline{x^3 - 2x^2 \phantom{{}+ 0x + 3}} \\ 3 \end{array}$$

$$r(x) = x^2 + \frac{3}{x - 2}$$

Esto demuestra que el comportamiento final de r es como el de la parábola $y = x^2$ porque $3/(x - 2)$ es pequeño cuando $|x|$ es grande. Esto es, $3/(x - 2) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Esto significa que la gráfica de r estará cercana a la gráfica de $y = x^2$ para $|x|$ grande.

Asíntota horizontal: La asíntota horizontal es el valor que alcanza y cuando $x \to \pm\infty$. Para ayudarnos a hallar este valor, dividimos numerador y denominador entre x^2, la potencia superior de x que aparece en la expresión:

$$y = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Las expresiones fraccionarias $\frac{4}{x}$, $\frac{5}{x^2}$, $\frac{2}{x}$ y $\frac{1}{x^2}$ se aproximan todas a 0 cuando $x \to \pm\infty$ (vea Ejercicio 83, página 12). Por lo tanto, cuando $x \to \pm\infty$, tenemos

Estos términos se aproximan a 0

$$y = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \longrightarrow \frac{2 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

Estos términos se aproximan a 0

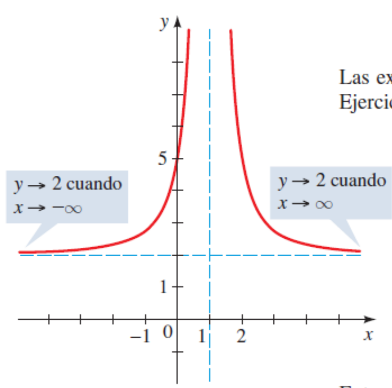


FIGURA 5

$r(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1}$

Entonces, la asíntota horizontal es la recta $y = 2$.

Como la gráfica debe aproximarse a la asíntota horizontal, podemos completarla como en la Figura 5.

Dominio y rango: La función r está definida para todos los valores de x que no sean 1, de modo que el dominio es $\{x \mid x \neq 1\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y \mid y > 2\}$.