TALLER 2

Tema 2 : Funciones escalonadas, racionales, irracionales. Funciones Exponencial y Logarítmica. Función valor absoluto. Función por tramos, Funciones trigonométricas, funciones inversas. Funciones hiperbólicas. Composición de funciones. Álgebra de funciones

Observe que los Pasos 2 y 3 se pueden invertir. En otras palabras, podemos intercambiar x y y primero y luego despejar y en términos de x.

En el Ejemplo 6, nótese la forma en que f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "Multiplique por 3, luego reste 2", mientras que f^{-1} es la regla "Sume 2, luego divida entre 3".

EJEMPLO 6 | Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = 3x - 2$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = f(x)$.

$$y = 3x - 2$$

A continuación despejamos x de esta ecuación.

$$3x = y + 2 \qquad \text{Sume 2}$$

$$x = \frac{y+2}{3} \qquad \text{Divida entre 3}$$

Finalmente, intercambiamos x y y.

$$y = \frac{x+2}{3}$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 37

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Usamos la Propiedad de la Función Inversa.

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x - 2) = \frac{(3x-2)+2}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+2}{3}\right) = 3\left(\frac{x+2}{3}\right) - 2 = x + 2 - 2 = x \checkmark$$

EJEMPLO 7 | Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{x^5 - 3}{2}$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = (x^5 - 3)/2$ y despejamos x.

$$y = \frac{x^5 - 3}{2} \qquad \text{Ecuación que define la función}$$

$$2y = x^5 - 3 \qquad \text{Multiplique por 2}$$

$$x^5 = 2y + 3 \qquad \text{Sume 3 (y cambie lados)}$$

$$x = (2y + 3)^{1/5} \qquad \text{Tome raíz quinta de cada lado}$$

A continuación intercambiamos x y y para obtener $y = (2x + 3)^{1/5}$. Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = (2x + 3)^{1/5}$.

TALLER 2

Una **función racional** es una función definida por una expresión racional. En el siguiente ejemplo encontramos la inversa de una función racional.

EJEMPLO 8 | Hallar la inversa de una función racional

Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = (2x+3)/(x-1)$ y despejamos x.

$$y = \frac{2x+3}{x-1} \qquad \text{Ecuación que define la función}$$

$$y(x-1) = 2x+3 \qquad \text{Multiplique por } x-1$$

$$yx - y = 2x + 3 \qquad \text{Desarrolle}$$

$$yx - 2x = y + 3 \qquad \text{Lleve los términos en } x \text{ al lado izquierdo}$$

$$x(y-2) = y + 3 \qquad \text{Factorice } x$$

$$x = \frac{y+3}{y-2} \qquad \text{Divida entre } y-2$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$.

EJEMPLO 5 | Graficar una función racional

Grafique $r(x) = \dfrac{2x^2+7x-4}{x^2+x-2}$ y exprese el dominio y rango.

SOLUCIÓN Factorizamos el numerador y el denominador, encontramos los puntos de intersección y asíntotas, y trazamos la gráfica.

Factorice: $y = \dfrac{(2x-1)(x+4)}{(x-1)(x+2)}$

Puntos de intersección x: Los puntos de intersección x son los ceros del numerador, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -4$.

Puntos de intersección y: Para hallar el punto de intersección y, sustituimos $x = 0$ en la forma original de la función.

$$r(0) = \frac{2(0)^2 + 7(0) - 4}{(0)2 + (0) - 2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

El punto de intersección y es 2.

Asíntotas verticales: Las asíntotas verticales se presentan donde el denominador es 0, es decir, donde la función no está definida. De la forma factorizada vemos que las asíntotas verticales son las rectas $x = 1$ y $x = -2$.

Cuando escojamos valores de prueba, debemos asegurarnos que no haya un punto de intersección x entre el punto de prueba y la asíntota vertical.

Comportamiento cerca de asíntotas verticales: Necesitamos saber si $y \to \infty$ o $y \to -\infty$ en cada lado de cada asíntota vertical. Para determinar el signo de y para valores x cerca de las asíntotas verticales, usamos valores de prueba. Por ejemplo, cuando $x \to 1^-$, usamos un valor de prueba cercano y a la izquierda de 1 ($x = 0.9$, por ejemplo) para comprobar si y es positiva o negativa a la izquierda de $x = 1$.

$$y = \frac{(2(0.9)-1)((0.9)+4)}{((0.9)-1)((0.9)+2)} \quad \text{cuyo signo es} \quad \frac{(+)(+)}{(-)(+)} \quad \text{(negativo)}$$

TALLER 2

$$y = \frac{(2(0.9) - 1)((0.9) + 4)}{((0.9) - 1)((0.9) + 2)} \quad \text{cuyo signo es} \quad \frac{(+)(+)}{(-)(+)} \quad \text{(negativo)}$$

Entonces, $y \to -\infty$ cuando $x \to 1^-$. Por otra parte, cuando $x \to 1^+$, usamos un valor de prueba cercano y a la derecha de 1 ($x = 1.1$, por ejemplo), para obtener

$$y = \frac{(2(1.1) - 1)((1.1) + 4)}{((1.1) - 1)((1.1) + 2)} \quad \text{cuyo signo es} \quad \frac{(+)(+)}{(+)(+)} \quad \text{(positivo)}$$

Entonces, $y \to \infty$ cuando $x \to 1^+$. Las otras entradas de la tabla siguiente se calculan de manera semejante.

Cuando $x \to$	-2^-	-2^+	1^-	1^+
el signo de $y = \dfrac{(2x-1)(x+4)}{(x-1)(x+2)}$ es	$\frac{(-)(+)}{(-)(-)}$	$\frac{(-)(+)}{(-)(+)}$	$\frac{(+)(+)}{(-)(+)}$	$\frac{(+)(+)}{(+)(+)}$
entonces $y \to$	$-\infty$	∞	$-\infty$	∞

EJEMPLO 6 | Gráfica de una función racional

Grafique $r(x) = \dfrac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$ y exprese el dominio y rango.

SOLUCIÓN

Factorice: $y = \dfrac{5x + 21}{(x+5)^2}$

Punto de intersección x: $-\dfrac{21}{5}$, de $5x + 21 = 0$

Punto de intersección y: $\dfrac{21}{25}$, porque $r(0) = \dfrac{5 \cdot 0 + 21}{0^2 + 10 \cdot 0 + 25}$

$$= \frac{21}{25}$$

Asíntota vertical: $x = -5$, de los ceros del denominador

Comportamiento cerca de asíntota vertical:

Cuando $x \to$	-5^-	-5^+
el signo de $y = \dfrac{5x+21}{(x+5)^2}$ es	$\frac{(-)}{(-)(-)}$	$\frac{(-)}{(+)(+)}$
entonces $y \to$	$-\infty$	$-\infty$

Asíntota horizontal: $y = 0$, porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador

Gráfica: Usamos la información que hemos encontrado, junto con algunos valores adicionales, para trazar la gráfica de la Figura 8.

x	y
-15	-0.5
-10	-1.2
-3	1.5
-1	1.0
3	0.6
5	0.5
10	0.3

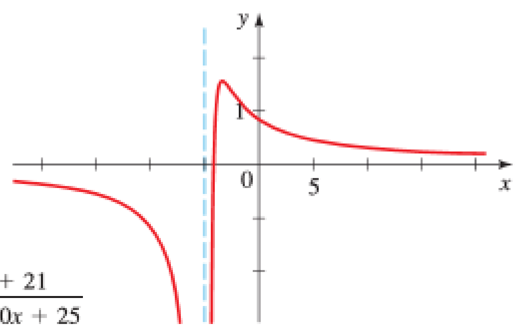


FIGURA 8

$$r(x) = \frac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$$

Dominio y rango: El dominio es $\{x \mid x \neq -5\}$. De la gráfica vemos que el rango es aproximadamente el intervalo $(-\infty, 1.5]$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 55

EJEMPLO 7 | Gráfica de una función racional

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$.

SOLUCIÓN

Factorice: $y = \dfrac{(x + 1)(x - 4)}{2x(x + 2)}$

Puntos de intersección x: -1 y 4, de $x + 1 = 0$ y $x - 4 = 0$

Punto de intersección y: Ninguno, porque $r(0)$ no está definido

Asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = -2$, de los ceros del denominador

Comportamiento cerca de asíntotas verticales:

Cuando $x \to$	-2^-	-2^+	0^-	0^+
el signo de $y = \dfrac{(x+1)(x-4)}{2x(x+2)}$ es	$\dfrac{(-)(-)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)(-)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(-)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(-)}{(+)(+)}$
entonces $y \to$	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$

TALLER 2

Asíntota horizontal: $y = \frac{1}{2}$, porque el grado del numerador y el grado del denominador son iguales y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{1}{2}$$

Gráfica: Usamos la información que hemos encontrado, junto con algunos valores adicionales, para trazar la gráfica de la Figura 9

x	y
-3	2.33
-2.5	3.90
-0.5	1.50
1	-1.00
3	-0.13
5	0.09

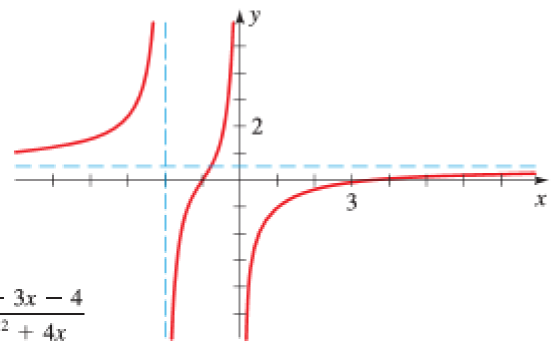


FIGURA 9
$r(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$

Dominio y rango: El dominio es $\{x \mid x \neq 0, x \neq -2\}$. De la gráfica vemos que el rango es todos los números reales.

HALLAR ASÍNTOTAS DE FUNCIONES RACIONALES

Sea r la función racional

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

1. Las asíntotas verticales de r son las rectas $x = a$, donde a es un cero del denominador.
2. **(a)** Si $n < m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = 0$.

   (b) Si $n = m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = \dfrac{a_n}{b_m}$.

   (c) Si $n > m$, entonces r no tiene asíntota horizontal.

TALLER 2

EJEMPLO 4 | Asíntotas de una función racional

Encuentre las asíntotas vertical y horizontal de $r(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$.

SOLUCIÓN

Asíntotas verticales: Primero factorizamos

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{(2x - 1)(x + 2)}$$

Este factor es 0 cuando $x = \frac{1}{2}$

Este factor es 0 cuando $x = -2$

Las asíntotas verticales son las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = -2$.

Asíntota horizontal: Los grados del numerador y denominador son iguales, y

$$\frac{\text{coeficiente principal de numerador}}{\text{coeficiente principal de denominador}} = \frac{3}{2}$$

Entonces, la asíntota horizontal es la recta $y = \frac{3}{2}$.

Para confirmar nuestros resultados, graficamos r usando una calculadora graficadora (vea Figura 6).

TALLER 2

CURVAS SENO Y COSENO DESPLAZADAS

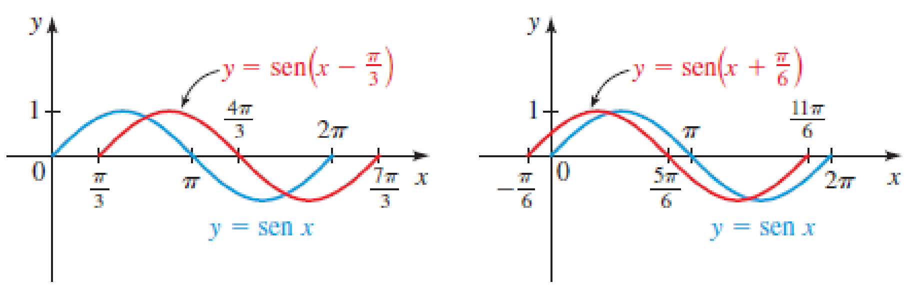
Las curvas sinusoidales y cosenoidales

$$y = a \operatorname{sen} k(x - b) \qquad \text{y} \qquad y = a \cos k(x - b) \qquad (k > 0)$$

tienen **amplitud** $|a|$, **período** $2\pi/k$, y **desfase** b.

Un intervalo apropiado sobre el cual graficar un período completo es $[b, b + (2\pi/k)]$.

Las gráficas de $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ y $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ se muestran en la Figura 12.



12

EJEMPLO 4 | Una curva seno desplazada

Encuentre la amplitud, período y desfase de $y = 3 \text{ sen } 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, y grafique un período completo.

SOLUCIÓN Obtenemos la amplitud, período y desfase de la forma de la función como sigue:

$$\text{amplitud} = |a| = 3, \quad \text{período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$y = 3 \text{ sen } 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{desfase} = \frac{\pi}{4} \text{ (a la derecha)}$$

Como el desfase es $\pi/4$ y el período es π, un período completo ocurre sobre el intervalo

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi\right] = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Como ayuda para trazar la gráfica, dividimos este intervalo en cuatro partes iguales y a continuación graficamos una curva seno con amplitud 3, como en la Figura 13.

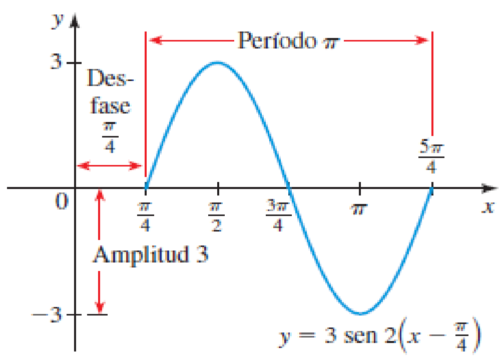


FIGURA 13

EJEMPLO 5 | Curva coseno desplazada

Encuentre la amplitud, período y desfase de

$$y = \frac{3}{4} \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

y grafique un período completo.

TALLER 2

SOLUCIÓN Primero escribimos esta función en la forma $y = a \cos k(x - b)$. Para hacer esto, factorizamos 2 de la expresión $2x + \frac{2\pi}{3}$ para obtener

$$y = \frac{3}{4} \cos 2\left[x - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Por lo tanto, tenemos

$$\text{amplitud} = |a| = \frac{3}{4}$$

$$\text{período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{desfase} = b = -\frac{\pi}{3} \qquad \text{Desfase } \frac{\pi}{3} \text{ a la } \textit{izquierda}$$

A partir de esta información tenemos que un período de esta curva coseno comienza y termina en $-\pi/3$. Para trazar la gráfica sobre el intervalo, éste lo dividimos en cuatro partes iguales y graficamos la curva coseno con amplitud como se muestra en la Figura 14.

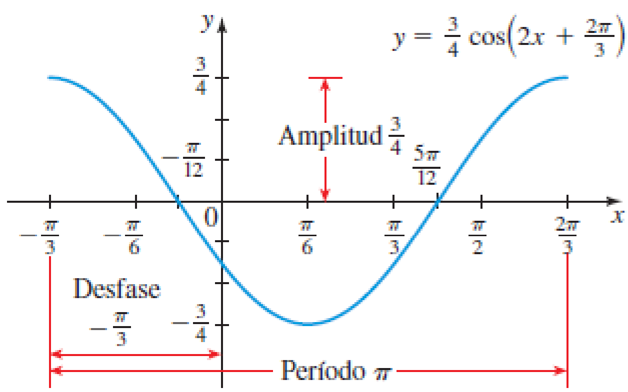


FIGURA 14