Taller 1 – Evaluación: Plano Cartesiano. Intervalos. Definición de función. Dominio y Rango. Gráfica de funciones. Función lineal y cuadrática

EJEMPLO 3 Trazado de rectas en el plano

Dibujar la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $y = 2x + 1$ ***b)*** $y = 2$ ***c)*** $3y + x - 6 = 0$

Solución

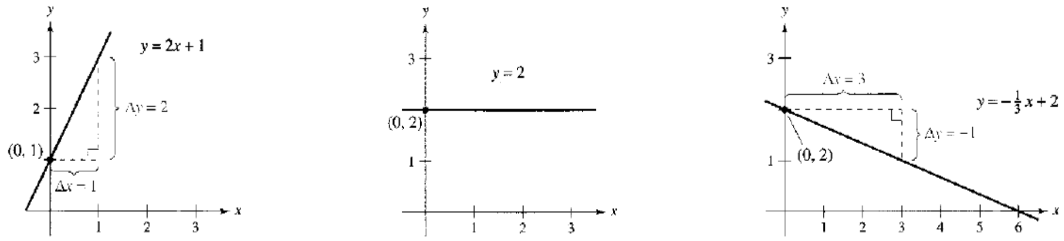
a) Puesto que $b = 1$, la intersección en y es $(0, 1)$. Como la pendiente es $m = 2$, se sabe que la recta asciende dos unidades por cada unidad que se mueve hacia la derecha, como se muestra en la figura P.18*a*.

b) Dado que $b = 2$, la intersección en y es $(0, 2)$. Como la pendiente es $m = 0$, se sabe que es horizontal, como se ilustra en la figura P.18*b*.

c) Comenzar por escribir la ecuación en forma pendiente-intersección.

$$3y + x - 6 = 0 \qquad \text{Ecuación original.}$$
$$3y = -x + 6 \qquad \text{Despejar el término en } y.$$
$$y = -\frac{1}{3}x + 2 \qquad \text{Forma pendiente-intersección.}$$

De esta forma, puede verse que la intersección en y es $(0, 2)$ y la pendiente $m = -\frac{1}{3}$. Esto quiere decir que la recta desciende una unidad por cada tres unidades que se mueve hacia la derecha, como se muestra en la figura P.18*c*.



a) $m = 2$; la recta sube ***b)*** $m = 0$; la recta es horizontal ***c)*** $m = = -\frac{1}{3}$; la recta baja

Figura P.18

Ecuación punto-pendiente de una recta

La ecuación de la recta con pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1) está dada por

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

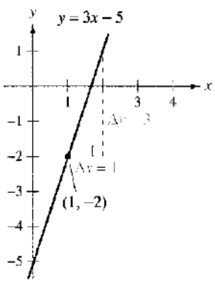
EJEMPLO 1 Determinación de la ecuación de una recta

Encontrar la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto (x_0, y_1).

Solución

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{Punto-pendiente.}$$
$$y - (-2) = 3(x - 1) \qquad \text{Sustituir } y_1 \text{ por } -2, x_1 \text{ por } 1 \text{ y } m \text{ por } 3.$$
$$y + 2 = 3x - 3 \qquad \text{Simplificar.}$$
$$y = 3x - 5 \qquad \text{Despejar } y.$$

(Ver la figura P.15.)



La recta de pendiente 3 que pasa por el punto $(1, -2)$

Figura P.15

TALLER 1

Se puede escribir la ecuación de una recta si se conocen su pendiente y las coordenadas de uno de sus puntos. Dada la pendiente m y un punto (x_1, y_1). Si (x, y) denota cualquier otro punto de la recta, entonces

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Resumen de ecuaciones de las rectas

1. Forma general: $Ax + By + C = 0, \quad (A, B \neq 0)$
2. Recta vertical: $x = a$
3. Recta horizontal: $y = b$
4. Forma punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$
5. Forma pendiente-intersección: $y = mx + b$

▼ Definición de función

Ya antes hemos empleado letras para representar números. Aquí hacemos algo muy distinto: usamos letras para representar *reglas*.

Una función es una regla. Para hablar de una función, es necesario darle un nombre. Usaremos letras como $f, g, h, \ldots$ para representar funciones. Por ejemplo, podemos usar la letra f para representar una regla como sigue:

"f" es la regla "elevar al cuadrado el número"

Cuando escribimos $f(2)$ queremos decir "aplicar la regla f al número 2". La aplicación de la regla da $f(2) = 2^2 = 4$. Del mismo modo, $f(3) = 3^2 = 9$, $f(4) = 4^2 = 16$, y en general $f(x) = x^2$.

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B.

EJEMPLO 1 **Evaluación de una función**

Para la función f definida por $f(x) = x^2 + 7$, calcular:

a) $f(3a)$ ***b)*** $f(b - 1)$ ***c)*** $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0$

Solución

a) $f(3a) = (3a)^2 + 7$ Sustituir x por $3a$.

$= 9a^2 + 7$ Simplificar.

b) $f(b - 1) = (b - 1)^2 + 7$ Sustituir x por $b - 1$.

$= b^2 - 2b + 1 + 7$ Desarrollar el binomio.

$= b^2 - 2b + 8$ Simplificar.

c)
$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{[(x + \Delta x)^2 + 7] - (x^2 + 7)}{\Delta x}$$
$$= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 7 - x^2 - 7}{\Delta x}$$
$$= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$
$$= 2x + \Delta x, \qquad \Delta x \neq 0$$

AYUDA DE ESTUDIO En el cálculo, s importante comunicar con claridad l dominio de una función o expresión. 'or ejemplo, en el ejemplo 1c, las xpresiones

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{y} \quad 2x + \Delta x,$$

$\Delta x \neq 0$

on equivalentes, ya que $\Delta x \neq 0$ se xcluye del dominio de la función o xpresión. Si no se estableciera esa estricción del dominio, las dos xpresiones no serían equivalentes.

NOTA La expresión del ejemplo 1c se llama *cociente incremental* o de *diferencias* y tiene un significado especial en el cálculo. Se verá más acerca de esto en el capítulo 2.

EJEMPLO 2 | Evaluación de una función

Sea $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de la función.

(a) $f(-2)$ **(b)** $f(0)$ **(c)** $f(4)$ **(d)** $f(\frac{1}{2})$

SOLUCIÓN Para evaluar f en un número, sustituimos el número por x en la definición de f.

(a) $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 5$

(b) $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$

(c) $f(4) = 3 \cdot (4)^2 + 4 - 5 = 47$

(d) $f(\frac{1}{2}) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$

EJEMPLO 4 | Evaluación de una función

Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, evalúe lo siguiente.

(a) $f(a)$ **(b)** $f(-a)$

(c) $f(a + h)$ **(d)** $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad h \neq 0$

SOLUCIÓN

(a) $f(a) = 2a^2 + 3a - 1$

(b) $f(-a) = 2(-a)^2 + 3(-a) - 1 = 2a^2 - 3a - 1$

(c)
$$\begin{aligned} f(a + h) &= 2(a + h)^2 + 3(a + h) - 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) + 3(a + h) - 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1 \end{aligned}$$

(d) Usando los resultados de las partes (c) y (a), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1) - (2a^2 + 3a - 1)}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 + 3h}{h} = 4a + 2h + 3 \end{aligned}$$

▼ Dominio de una función

Recuerde que el *dominio* de una función es el conjunto de todas las entradas para la función. El dominio de una función puede indicarse explícitamente. Por ejemplo, si escribimos

$$f(x) = x^2 \qquad 0 \le x \le 5$$

entonces el dominio es el conjunto de todos los números reales x para los cuales $0 \le x \le 5$. Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se indica explícitamente, entonces por convención *el dominio de la función es el dominio de la expresión algebraica, es decir, el conjunto de todos los números reales para los cuales la expresión está definida como un número real.* Por ejemplo, considere las funciones

Los dominios de expresiones algebraicas se estudian en la página 35.

$$f(x) = \frac{1}{x-4} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

La función f no está definida en $x = 4$, de modo que su dominio es $\{x \mid x \ne 4\}$. La función g no está definida para x negativa, de modo que su dominio es $\{x \mid x \ge 0\}$.

EJEMPLO 6 | Hallar dominios de funciones

Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ **(b)** $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **(c)** $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t+1}}$

SOLUCIÓN

(a) Una expresión racional no está definida cuando el denominador es 0. Como

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

vemos que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Entonces, el dominio de f es

$$\{x \mid x \ne 0, x \ne 1\}$$

El dominio también se puede escribir en notación de intervalos como

$$(\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

(b) No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, de modo que debemos tener $9 - x^2 \ge 0$. Usando los métodos de la Sección 1.7, podemos resolver esta desigualdad para hallar que $-3 \le x \le 3$. Por lo tanto, el dominio de g es

$$\{x \mid -3 \le x \le 3\} = [-3, 3]$$

(c) No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, y no podemos dividir entre 0, de modo que debemos tener $t + 1 > 0$, es decir, $t > -1$. Por lo tanto, el dominio de h es

$$\{t \mid t > -1\} = (-1, \infty)$$

Cuatro formas de representar una función

Para ayudarnos a entender lo que es una función, hemos empleado diagramas de máquina y de flecha. Podemos describir una función específica en las siguientes cuatro formas:

- verbalmente (por descripción en palabras)
- algebraicamente (por una fórmula explícita)
- visualmente (por una gráfica)
- numéricamente (por una tabla de valores)

LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Si f es una función con dominio A, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

localizados en un plano de coordenadas. En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; esto es, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

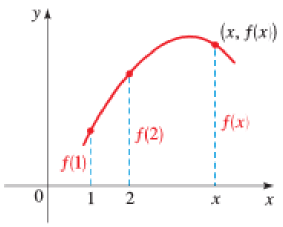


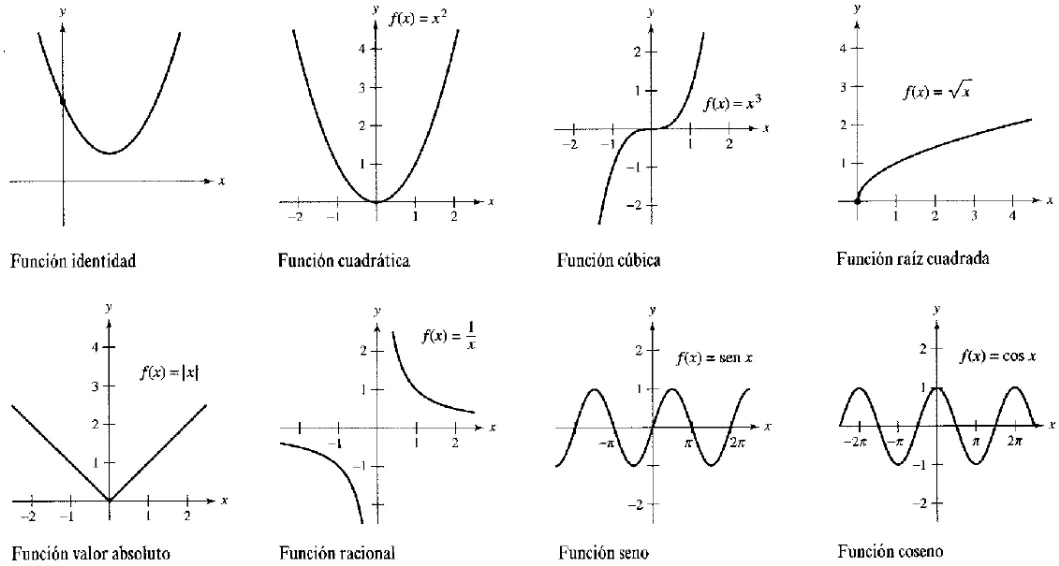
FIGURA 1 La altura de la gráfica sobre el punto x es el valor de $f(x)$.

La gráfica de una función f da un retrato del comportamiento o "historia de la vida" de la función. Podemos leer el valor de $f(x)$ a partir de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (vea Figura 1).

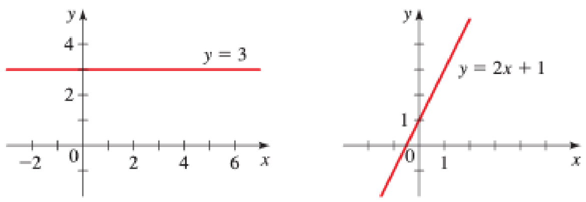
Una función f de la forma $f(x) = mx + b$ se denomina **función lineal** porque su gráfica es la gráfica de la ecuación $y = mx + b$, que representa una recta con pendiente m y punto de intersección b en y. Un caso especial de una función lineal se presenta cuando la pendiente es $m = 0$. La función $f(x) = b$, donde b es un número determinado, recibe el nombre de **función constante** porque todos sus valores son el mismo número, es decir, b. Su gráfica es la recta horizontal $y = b$. La Figura 2 muestra las gráficas de la función constante $f(x) = 3$ y la función lineal $f(x) = 2x + 1$.

TALLER I

En la figura P.27 se muestran las gráficas de ocho funciones básicas, las cuales hay que conocer bien.



Gráficas de ocho funciones básicas
Figura P.27



La función constante $f(x) = 3$ La función lineal $f(x) = 2x + 1$

FIGURA 2

EJEMPLO 1 | Graficar funciones por localización de puntos

Trace las gráficas de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = x^2$ **(b)** $g(x) = x^3$ **(c)** $h(x) = \sqrt{x}$

SOLUCIÓN Primero hacemos una tabla de valores. A continuación, localizamos los puntos dados por la tabla y los unimos con una curva suave sin irregularidades para obtener la gráfica. Las gráficas están trazadas en la Figura 3 en la página siguiente.

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
±1	1
±2	4
±3	9

x	$g(x) = x^3$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8

x	$h(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2
5	$\sqrt{5}$

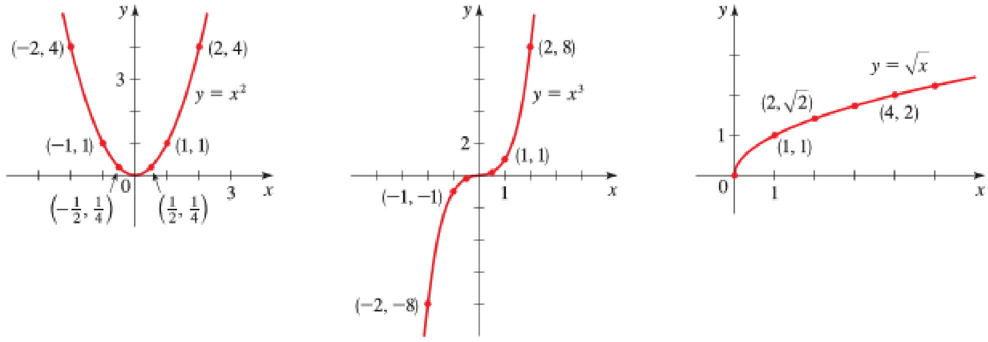


FIGURA 3 (a) $f(x) = x^2$ (b) $g(x) = x^3$ (c) $h(x) = \sqrt{x}$

EJEMPLO 9 | Ecuaciones que definen funciones

¿La ecuación define a y como función de x?

(a) $y - x^2 = 2$ **(b)** $x^2 + y^2 = 4$

SOLUCIÓN

(a) Despejando y en términos de x tendremos

$$y - x^2 = 2$$

$$y = x^2 + 2 \qquad \text{Sume } x^2$$

La última ecuación es una regla que da un valor de y por cada valor de x, de modo que define a y como función de x. Podemos escribir la función como $f(x) = x^2 + 2$.

(b) Intentamos despejar y en términos de x:

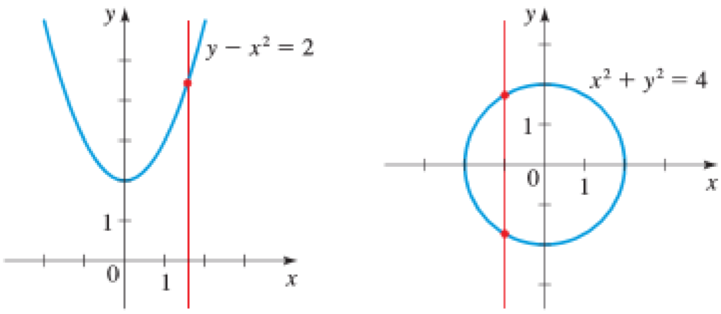
$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y^2 = 4 - x^2 \qquad \text{Reste } x^2$$

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

La última ecuación da dos valores de y por un valor dado de x. Entonces, la ecuación no define a y como una función de x.

Las gráficas de las ecuaciones del Ejemplo 9 se ilustran en la Figura 12. La Prueba de la Recta Vertical muestra gráficamente que la ecuación del Ejemplo 9(a) define una función, pero la ecuación del Ejemplo 9(b) no la define.



(a) (b)

FIGURA 12

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Una **función cuadrática** es una función polinomial de grado 2. Entonces, una función cuadrática es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

Vemos en esta sección la forma en que las funciones cuadráticas modelan muchos fenómenos reales. Empecemos por analizar las gráficas de funciones cuadráticas.

▼ Graficar funciones cuadráticas usando la forma normal

Para una definición geométrica de parábolas, vea la Sección 11.1.

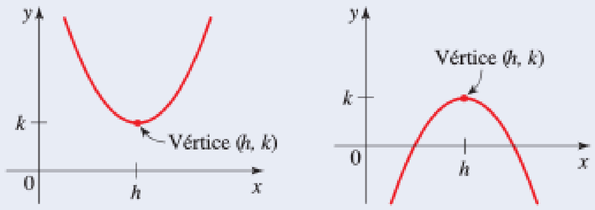
Si tomamos $a = 1$ y $b = c = 0$ en la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtenemos la función cuadrática $f(x) = x^2$, cuya gráfica es la parábola graficada en el Ejemplo 1 de la Sección 2.2. De hecho, la gráfica de cualquier función cuadrática es una **parábola**; puede obtenerse de la gráfica de $f(x) = x^2$ por las transformaciones dadas en la Sección 2.5.

FORMA NORMAL DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede expresarse en la **forma normal**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con vértice (h, k); la parábola abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.



$f(x) = a(x - h)^2 + k, \ a > 0$ $\qquad$ $f(x) = a(x - h)^2 + k, \ a < 0$

EJEMPLO 1 | Forma normal de una función cuadrática

Sea $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

(a) Exprese f en forma normal. **(b)** Trace la gráfica de f.

Completar el cuadrado se estudia en la Sección 1.5.

$f(x) = 2(x-3)^2 + 5$

El vértice es $(3, 5)$

SOLUCIÓN

(a) Como el coeficiente de x^2 no es 1, debemos factorizar este coeficiente de los términos que contienen x antes de completar el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 12x + 23 \\ &= 2(x^2 - 6x) + 23 && \text{Factorice 2 de los términos en } x \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 23 - 2\cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste } 2\cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 2(x-3)^2 + 5 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

La forma normal es $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$.

(b) La forma normal nos dice que obtenemos la gráfica de f al tomar la parábola $y = x^2$, desplazándola 3 unidades a la derecha, alargándola en un factor de 2 y moviéndola 5 unidades hacia arriba. El vértice de la parábola está en $(3, 5)$, y la parábola abre hacia arriba. Alargamos la gráfica de la Figura 1 observando que el punto de intersección en y es $f(0) = 23$.

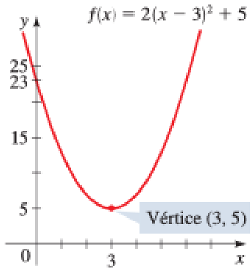


FIGURA 1

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Una **función cuadrática** es una función polinomial de grado 2. Entonces, una función cuadrática es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.