TALLER 7

APLICACIONES DE LA INTEGRAL: longitud de arco

Longitud de arco y trabajo

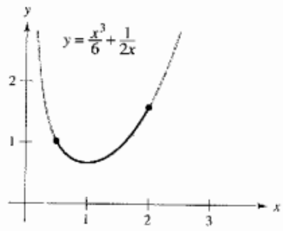
Definición de longitud de arco

Sea la función dada por $y = f(x)$ que represente una curva suave en el intervalo $[a, b]$. La longitud del arco de f entre a y b es

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Similarmente, para una curva suave dada por $x = g(y)$, la **longitud de arco** de g entre c y d es

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy.$$



La longitud de arco de la gráfica de y en $[\frac{1}{2}, 2]$
Figura 7.39

EJEMPLO 2 **Cálculo de la longitud de arco**

Encontrar la longitud de arco del

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

en el intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$, como se muestra en la figura 7.39.

Solución Usando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{6} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$$

se tiene una longitud de arco de

$$\begin{aligned} s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx &= \int_{1/2}^2 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right]^2}\, dx && \text{Fórmula de longitud de arco.} \\ &= \int_{1/2}^2 \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right)}\, dx \\ &= \int_{1/2}^2 \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx && \text{Simplificar.} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right]_{1/2}^2 && \text{Integrar.} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{13}{6} + \frac{47}{24}\right) \\ &= \frac{33}{16}. \end{aligned}$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para ver cómo la longitud de arco puede ser usada para definir las funciones trigonométricas, ver el artículo "Trigonometry Requires Calculus, Not Vice Versa" por Yves Nievergelt en los *UMAP Modules*.

EJEMPLO 3 **Cálculo de la longitud de arco**

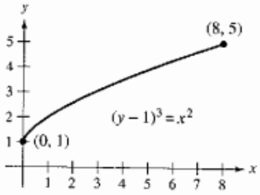
Encontrar la longitud de arco del $(y-1)^3 = x^2$ en el intervalo $[0, 8]$, como se muestra en la figura 7.40.

Solución Empezar resolviendo para x en términos y: $x = \pm (y-1)^{3/2}$. Eligiendo el valor positivo de x produce

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}(y-1)^{1/2}.$$

El intervalo x [0,8] corresponde al intervalo y [1, 5] y la longitud de arco es

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_1^5 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}(y-1)^{1/2}\right]^2}\, dy \quad \text{Fórmula para longitud de arco.}$$
$$= \int_1^5 \sqrt{\frac{9}{4}y - \frac{5}{4}}\, dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^5 \sqrt{9y-5}\, dy \quad \text{Simplificar.}$$
$$= \frac{1}{18}\left[\frac{(9y-5)^{3/2}}{3/2}\right]_1^5 \quad \text{Integrar.}$$
$$= \frac{1}{27}(40^{3/2} - 4^{3/2})$$
$$\approx 9.073.$$



Longitud de arco de la gráfica de y en [0, 8]
Figura 7.40

2) Hallar la longitud del arco de la curva $9y^2 = 4x^3$ comprendido entre los puntos de la curva de abscisa $x = 0$ y $x = 3$

En este caso vemos que es sencillo expresar a y como función de x:

$$9y^2 = 4x^3 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{9}x^3 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{4}{9}x^3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

Derivando,

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (y')^2 = x$$

de manera que

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_0^3 \sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{3}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{2}{3}\sqrt{27}\ u$$

2) Hallar la longitud del arco de la curva $9y^2 = 4x^3$ comprendido entre los puntos de la curva de abscisa $x = 0$ y $x = 3$

En este caso vemos que es sencillo expresar a y como función de x:

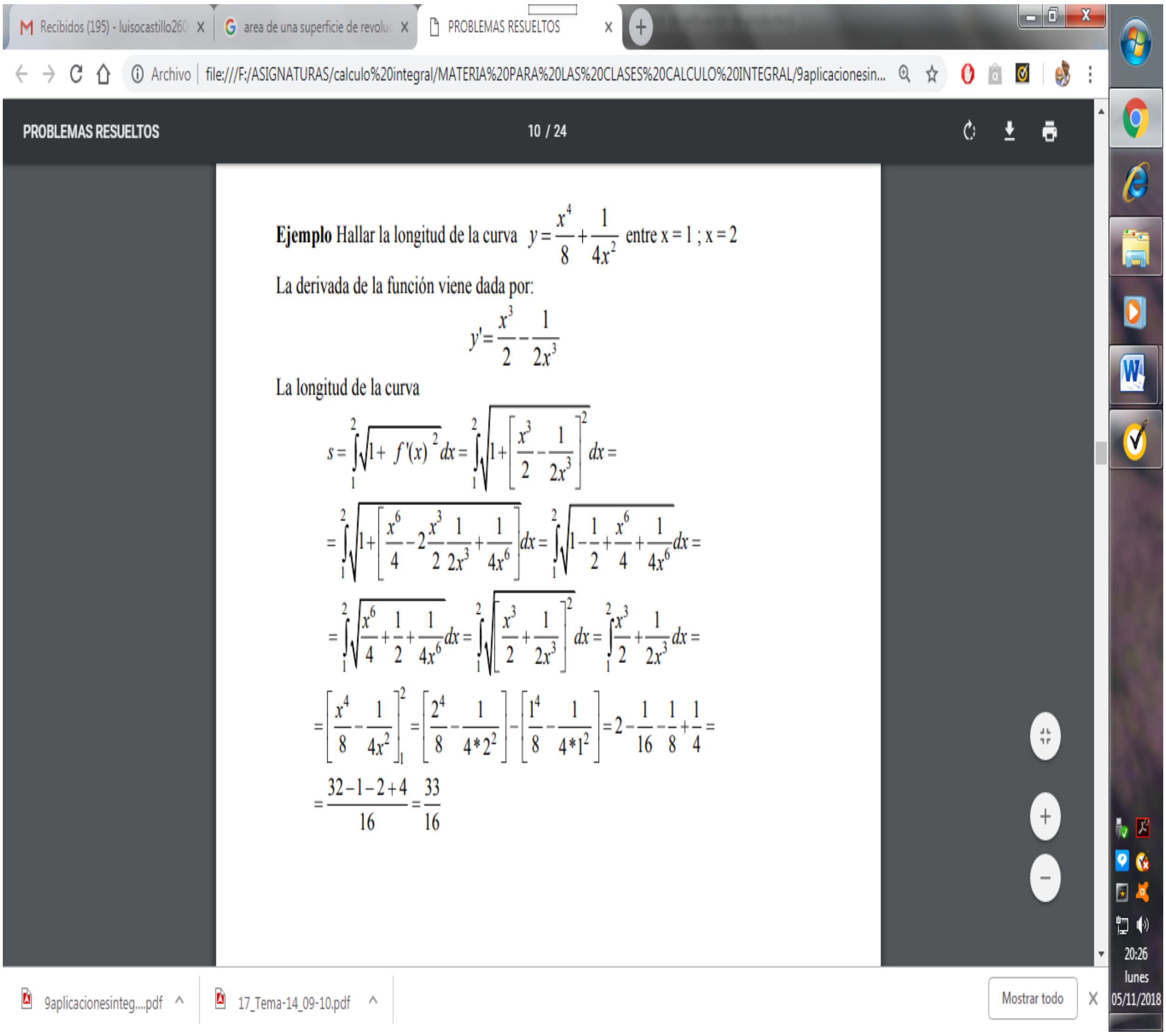
$$9y^2 = 4x^3 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{9}x^3 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{4}{9}x^3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

Derivando,

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (y')^2 = x$$

de manera que

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_0^3 \sqrt{1 + x}\, dx = \frac{2}{3}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{2}{3}\sqrt{27}\, u$$



PROBLEMAS RESUELTOS 10 / 24

Ejemplo Hallar la longitud de la curva $y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$ entre x = 1 ; x = 2

La derivada de la función viene dada por:

$$y'=\frac{x^3}{2}-\frac{1}{2x^3}$$

La longitud de la curva

$$s=\int_1^2\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{1+\left[\frac{x^3}{2}-\frac{1}{2x^3}\right]^2}\,dx=$$

$$=\int_1^2\sqrt{1+\left[\frac{x^6}{4}-2\frac{x^3}{2}\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{4x^6}\right]}\,dx=\int_1^2\sqrt{1-\frac{1}{2}+\frac{x^6}{4}+\frac{1}{4x^6}}\,dx=$$

$$=\int_1^2\sqrt{\frac{x^6}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^6}}\,dx=\int_1^2\sqrt{\left[\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2x^3}\right]^2}\,dx=\int_1^2\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2x^3}\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{8}-\frac{1}{4x^2}\right]_1^2=\left[\frac{2^4}{8}-\frac{1}{4*2^2}\right]-\left[\frac{1^4}{8}-\frac{1}{4*1^2}\right]=2-\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{32-1-2+4}{16}=\frac{33}{16}$$

2) Calcular la longitud de un arco de

$$y=\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}\ ,\qquad 1\le x\le 2$$

<u>Solución</u>:

Usando la relación (1) $\quad L_C=\int_a^b\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$, tenemos

$$L_C=\int_1^2\sqrt{1+\left[\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}\right]^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{1+\frac{x^4}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}}\,dx=\int_1^2\sqrt{\left[\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right]^2}\,dx=\left[\frac{x^3}{12}-\frac{1}{x}\right]_1^2=\frac{13}{12}$$ //

EJEMPLO 4 Encuentre la función longitud de arco para la curva $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$ tomando a $P_0(1, 1)$ como el punto de partida.

SOLUCIÓN Si $f(x) = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$, entonces

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{8x}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2 = 1 + 4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}$$

$$= 4x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2} = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$$

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = 2x + \frac{1}{8x}$$

Así, la función longitud de arco está dada por

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

$$= \int_1^x \left(2t - \frac{1}{8t}\right) dt = t^2 + \tfrac{1}{8}\ln t\Big]_1^x$$

$$= x^2 + \tfrac{1}{8}\ln x - 1$$

Por ejemplo, la longitud de arco a lo largo de la curva de $(1, 1)$ a $(3, f(3))$ es

$$s(3) = 3^2 + \tfrac{1}{8}\ln 3 - 1 = 8 + \frac{\ln 3}{8} \approx 8.1373$$

□