CLASE 6 APLICACIONES DE LA INTEGRAL : VOLUMEN

Una fórmula similar puede derivarse si el eje de revolución es vertical.

Método de los discos

Para encontrar el volumen de un sólido de revolución con el **método de los discos**, usar una de las fórmulas siguientes, como se muestra en la figura 7.15.

Eje de revolución horizontal	*Eje de revolución vertical*
$\text{Volumen} = V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx$	$\text{Volumen} = V = \pi \int_c^d [R(y)]^2\, dy$

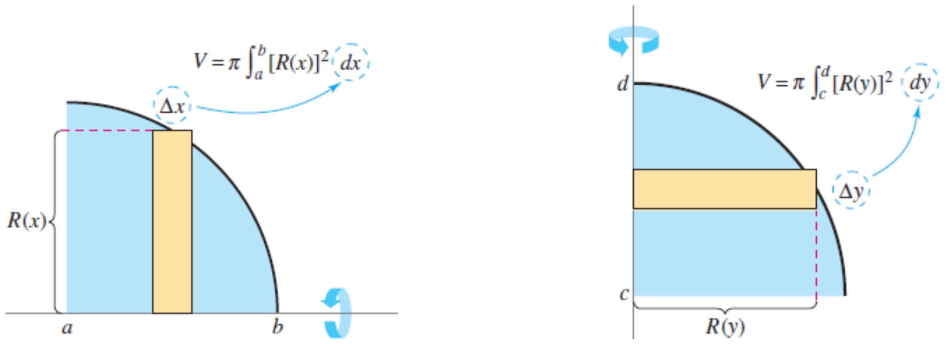


Figura 7.15

EJEMPLO 2 Eje de revolución alrededor de una recta que no es un eje de coordenadas

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por

$$f(x) = 2 - x^2$$

y $g(x) = 1$ alrededor de la recta $y = 1$, como se muestra en la figura 7.17.

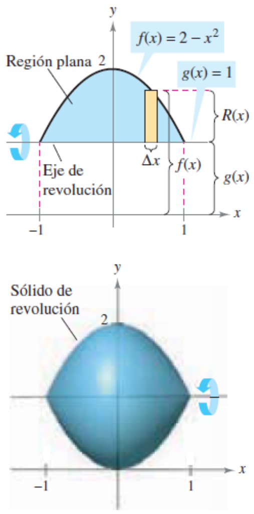


Figura 7.17

Solución Al igualar $f(x)$ y $g(x)$, se puede determinar que las dos gráficas se intersecan cuando $x = \pm 1$. Para encontrar el radio, restar $g(x)$ de $f(x)$.

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (2 - x^2) - 1 \\ &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

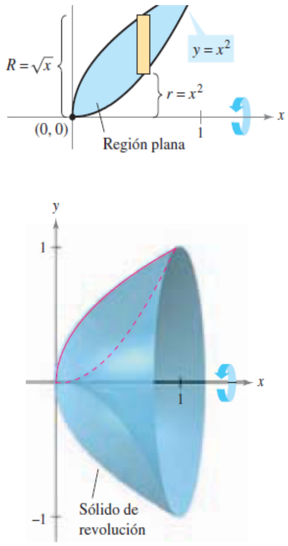
Por último, integrar entre -1 y 1 para encontrar el volumen.

$$\begin{aligned} V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx &= \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2\, dx && \text{Aplicar el método de los discos.} \\ &= \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\, dx && \text{Simplificar.} \\ &= \pi \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{1} && \text{Integrar.} \\ &= \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$

TALLER 6

$$V = \pi \int_a^b \left([R(x)]^2 - [r(x)]^2 \right) dx.$$

Método de las arandelas.



Sólido de revolución
Figura 7.20

EJEMPLO 3 Uso del método de las arandelas (anillos)

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$ alrededor del eje x, como se muestra en la figura 7.20.

Solución En la figura 7.20 se puede observar que los radios exteriores e interiores son:

$R(x) = \sqrt{x}$ Radio exterior.

$r(x) = x^2$ Radio interior.

Integrando entre 0 y 1 produce

$$V = \pi \int_a^b \left([R(x)]^2 - [r(x)]^2 \right) dx$$ Aplicar el método de las arandelas.

$$= \pi \int_0^1 \left[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x - x^4)\, dx$$ Simplificar.

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$ Integrar.

$$= \frac{3\pi}{10}.$$

Ej. 132: Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar sobre el eje "x", la región acotada por: $y = x^2 + 1$ y la recta $y = x + 3$

$$x^2 + 1 = x + 3$$
$$X^2 - x - 2 = 0$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0$$
$$X_1 = 2 \quad x_2 = -1$$

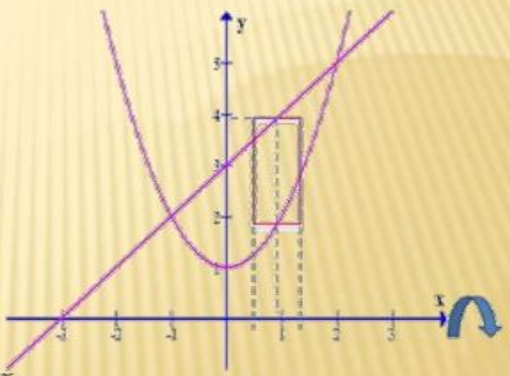
$$V = \int_{-1}^{2} [(x+3)^2 - (x^2+1)^2]\, dx$$

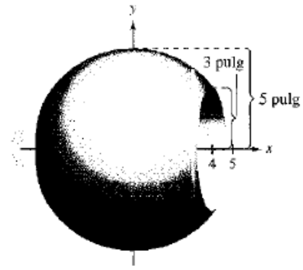
$$V = \int_{-1}^{2} [(x^2 + 6x + 9) - (x^4 + 2x^2 + 1)]\, dx$$

$$V = \int_{-1}^{2} (-x^4 - x^2 + 6x + 8)\, dx$$

$$V = -\int_{-1}^{2} x^4 dx - \int_{-1}^{2} x^2 dx + 6\int_{-1}^{2} x\, dx + 8\int_{-1}^{2} dx$$

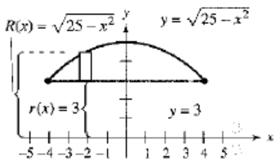
$$V = \frac{117}{5}\, u^3$$





Sólido de revolución

a)



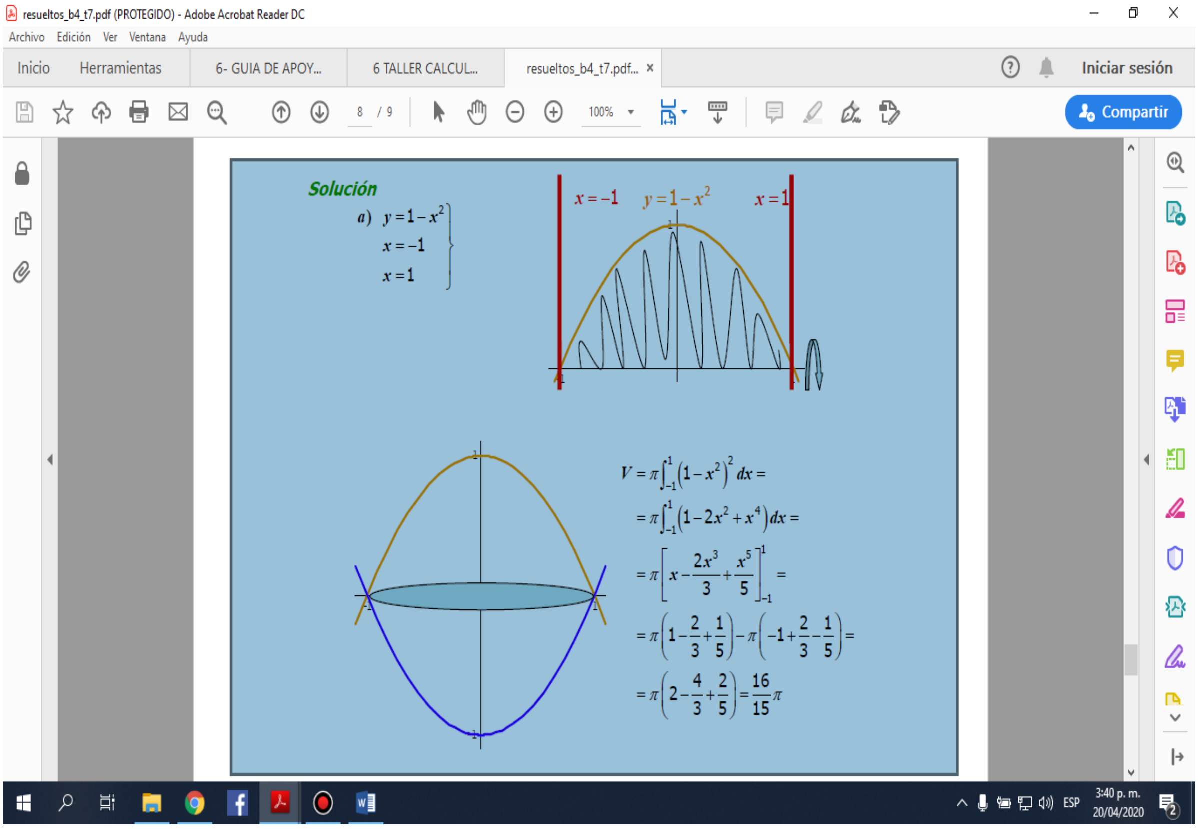
Región plana

EJEMPLO 5 Diseño de manufactura

Un fabricante taladra un orificio a través del centro de una esfera de metal de 5 pulgadas de radio, como se muestra en la figura 7.23*a*. El orificio tiene un radio de 3 pulgadas. ¿Cuál es el volumen del objeto de metal resultante?

Solución Puede imaginar el objeto generado por un segmento de la circunferencia cuya ecuación es $x^2+y^2=25$, como se muestra en la figura 7.23*b*). Porque el radio del orificio es 3 pulgadas, sea $y=3$ se resuelve la ecuación $x^2+y^2=25$ para determinar que los límites de integración son $x=\pm4$. Así que, los radios interiores y exteriores son $r(x)=3$ y $R(x)=\sqrt{25-x^2}$ y el volumen está dado por

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_a^b\left([R(x)]^2-[r(x)]^2\right)dx=\pi\int_{-4}^{4}\left[\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2-(3)^2\right]dx\\&=\pi\int_{-4}^{4}(16-x^2)\,dx\\&=\pi\left[16x-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4}\\&=\frac{256\pi}{3}\text{ pulgadas cúbicas.}\end{aligned}$$

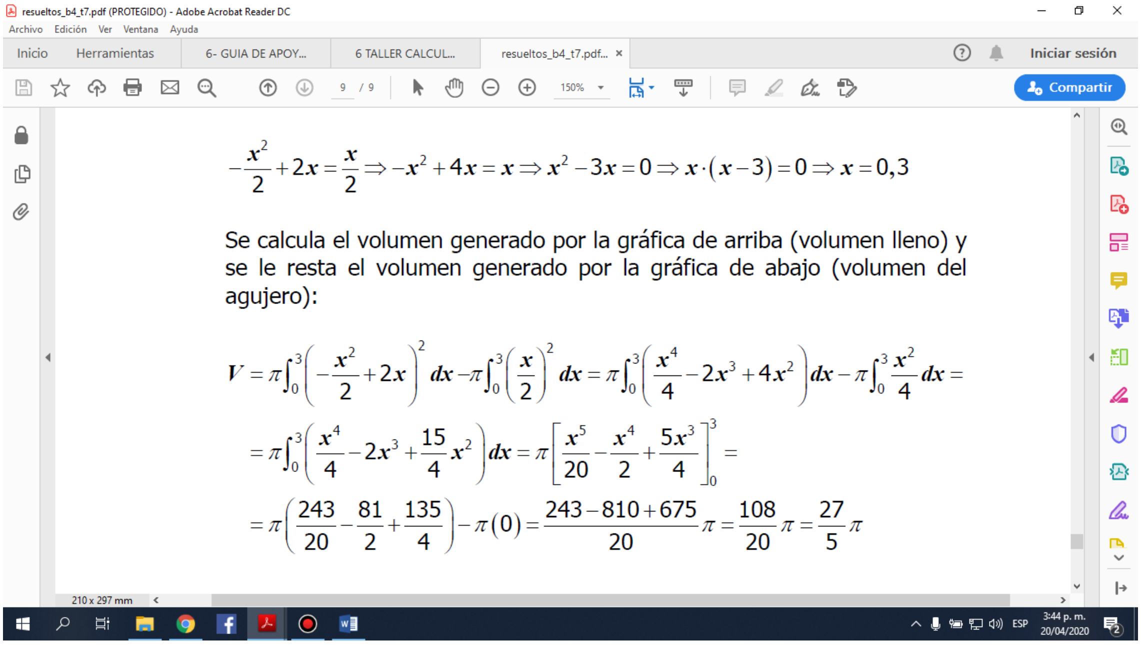


Solución

a) $\left.\begin{aligned}y&=1-x^2\\x&=-1\\x&=1\end{aligned}\right\}$

$x=-1$ $\quad y=1-x^2$ $\quad x=1$

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2dx=\\&=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-2x^2+x^4\right)dx=\\&=\pi\left[x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}=\\&=\pi\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)-\pi\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)=\\&=\pi\left(2-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right)=\frac{16}{15}\pi\end{aligned}$$



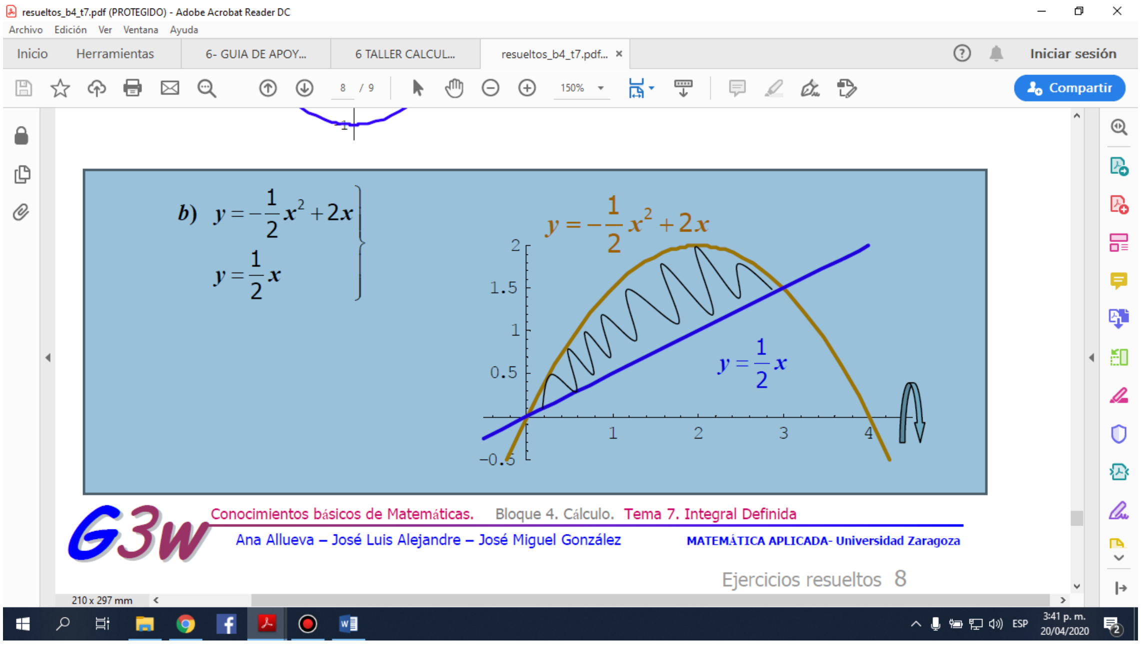
$$-\frac{x^2}{2}+2x=\frac{x}{2}\Rightarrow -x^2+4x=x\Rightarrow x^2-3x=0\Rightarrow x\cdot(x-3)=0\Rightarrow x=0,3$$

Se calcula el volumen generado por la gráfica de arriba (volumen lleno) y se le resta el volumen generado por la gráfica de abajo (volumen del agujero):

$$V=\pi\int_0^3\left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)^2dx-\pi\int_0^3\left(\frac{x}{2}\right)^2dx=\pi\int_0^3\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right)dx-\pi\int_0^3\frac{x^2}{4}dx=$$

$$=\pi\int_0^3\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{15}{4}x^2\right)dx=\pi\left[\frac{x^5}{20}-\frac{x^4}{2}+\frac{5x^3}{4}\right]_0^3=$$

$$=\pi\left(\frac{243}{20}-\frac{81}{2}+\frac{135}{4}\right)-\pi(0)=\frac{243-810+675}{20}\pi=\frac{108}{20}\pi=\frac{27}{5}\pi$$

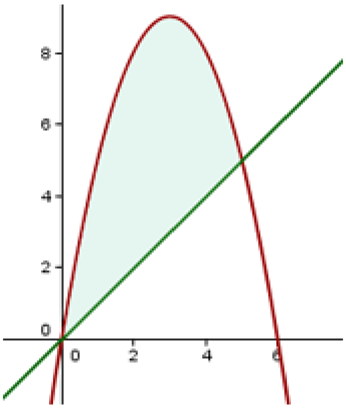


Ejercicio 7 resuelto

Calcular el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de y = 6x − x2, i = x.

Puntos de intersección:

$$\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = x \end{cases} \qquad 6x - x^2 = x \qquad (0,0) \quad (5,5)$$



La parábola queda por encima de la recta en el intervalo de integración.

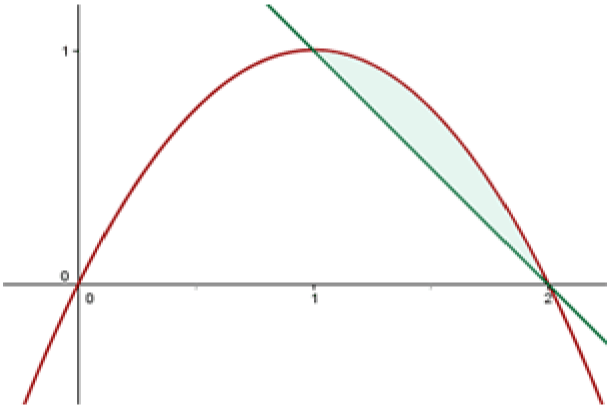
$$V = \pi \int_0^5 \left[\left(6x - x^2\right)^2 - x^2 \right] dx = \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + \frac{35}{3}x^3 \right]_0^5 = \frac{625\pi}{3}\, u^3$$

Ejercicio 5 resuelto

Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de y = 2x −x2, y = −x + 2.

Puntos de intersección entre la parábola y la recta:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \qquad 2x - x^2 = -x + 2 \qquad (1,1) \quad (2,0)$$



La parábola está por encima de la recta en el intervalo de integración.

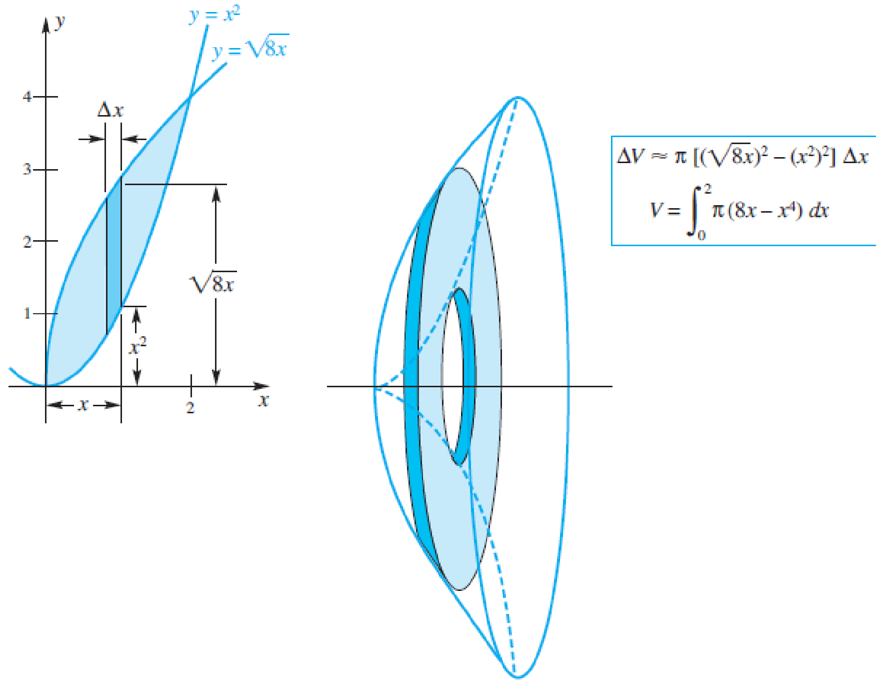
$$V = \pi\int_1^2\left[\left(2x - x^2\right)^2 - \left(-x+2\right)^2\right] dx = \pi\int_1^2\left(x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4\right) dx =$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x\right]_1^2 = \frac{\pi}{5}\,u^3$$

EJEMPLO 3 Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por las parábolas $y = x^2$ y $y^2 = 8x$ en torno al eje x.

SOLUCIÓN Las palabras clave siguen siendo *rebane, aproxime, integre* (véase la figura 10).

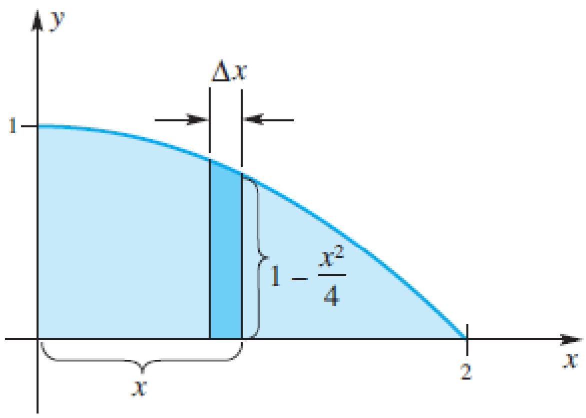
$$V = \pi\int_0^2 (8x - x^4)\, dx = \pi\left[\frac{8x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{48\pi}{5} \approx 30.16$$



EJEMPLO 5 Sea la base de un sólido la región plana en el primer cuadrante acotada por $y = 1 - x^2/4$, el eje x y el eje y. Supóngase que las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados. Encuentre el volumen del sólido.

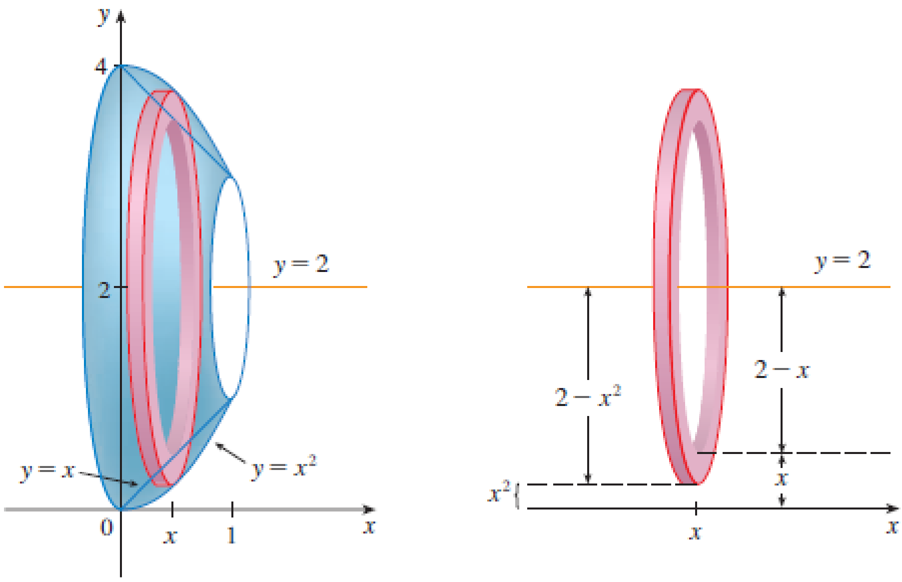
$$V = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{80}\right]_0^2$$

$$= 2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{80} = \frac{16}{15} \approx 1.07$$



$$\boxed{\begin{aligned} \Delta V &\approx \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 \Delta x \\ V &= \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx \end{aligned}}$$

EJEMPLO 5 Calcule el volumen del sólido obtenido al girar la región del ejemplo 4 alrededor de la recta $y = 2$.



9

El área de la sección transversal es

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2$$

y tanbién el volumen de S es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,dx \\ &= \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\,dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,dx \\ &= \pi\left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$