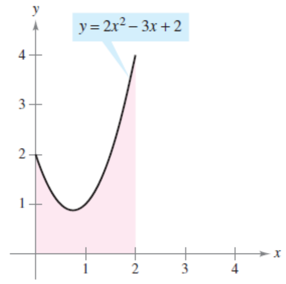
TALLER 5 APLICACIONES DE LAS INTEGRALES – AREAS



El área de la región acotada por la gráfica de y, el eje x, $x = 0$ y $x = 2$ es $\frac{10}{3}$
Figura 4.28

EJEMPLO 3 Empleo del teorema fundamental para encontrar un área

Encontrar el área de la región delimitada por la gráfica de $y = 2x^2 - 3x + 2$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, como se muestra en la figura 4.28.

Solución Notar que $y > 0$ en el intervalo $[0, 2]$.

$$\text{Área} = \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)\, dx \qquad \text{Integrar entre } x = 0 \text{ y } x = 2.$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^2 \qquad \text{Encontrar la antiderivada.}$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 6 + 4\right) - (0 - 0 + 0) \qquad \text{Aplicar el teorema fundamental del cálculo.}$$

$$= \frac{10}{3} \qquad \text{Simplificar.}$$

Calcula el área de la figura plana limitada por las parábolas $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$.

Representamos las parábolas a partir del vértice y los puntos de corte con los ejes.

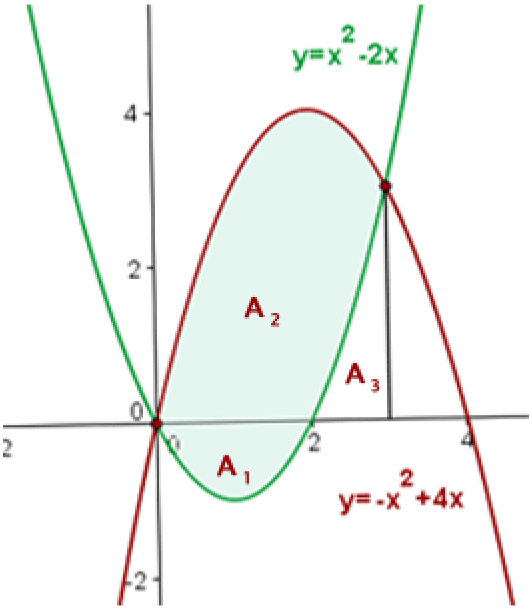
$$x_v = \frac{2}{2} = 1 \qquad y_v = 1^2 - 2\cdot 1 = -1 \qquad V(1,-1)$$

$$0 = x^2 - 2x \qquad 0 = x(x-2) \qquad (0,0) \quad (2,0)$$

$$x_v = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad y_v = -2^2 + 4\cdot 2 = 4 \qquad V(2,-4)$$

$$0 = -x^2 + 4x \qquad 0 = x(-x+4) \qquad (0,0) \quad (4,0)$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 + 4x \end{cases} \qquad x^2 - 2x = -x^2 + 4x \qquad (0,0) \quad (3,3)$$



$$A_1 = \int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = -\frac{4}{3} \qquad \left|A_1\right| = \frac{4}{3}u^2$$

$$A_2 = \int_0^3 \left(-x^2 + 4x\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^3 = 9 \qquad A_2 = 9u^2$$

$$A_3 = \int_2^3 \left(x^2 - 2x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 = \frac{4}{3} \qquad A_3 = \frac{4}{3}u^2$$

$$A = \left|A_1\right| + A_2 - A_3 \qquad A = \frac{4}{3} + 9 - \frac{4}{3} = 9u^2$$

Ejercicio nº 12.-

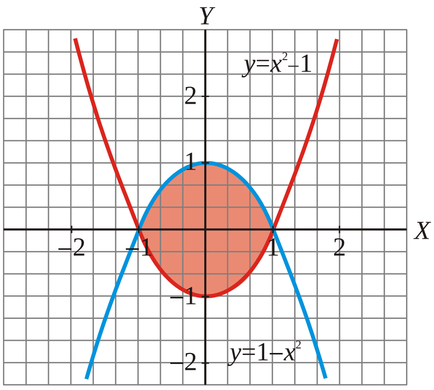
Calcula el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$.

Solución:

- $x^2 - 1 - \left(1 - x^2\right) = 2x^2 - 2$
- $2x^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 1$

- $G(x) = \int \left(2x^2 - 2\right) = \dfrac{2x^3}{3} - 2x$
- $G(-1) = \dfrac{4}{3}; \quad G(1) = \dfrac{-4}{3}$
- $\text{Área} = \left|G(1) - G(-1)\right| = \dfrac{8}{3}\text{u}^2$

Las gráficas no son necesarias, pero las incluimos para visualizar el resultado:



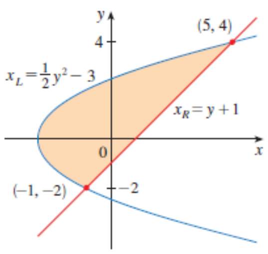


FIGURA 13

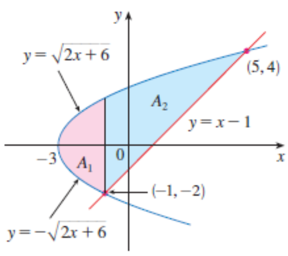


FIGURA 14

EJEMPLO 6 Calcular el área definida mediante la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUCIÓN Al resolver las dos ecuaciones los puntos de intersección son $(-1, -2)$ y $(5, 4)$. Al resolver la ecuación de la parábola y determinan x; observa que, según la figura 13, las curvas de los límites a la izquierda y a la derecha son

$$x_L = \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \qquad x_R = y + 1$$

Es necesario integrar entre los valores de y adecuados, $y = -2$ y $y = 4$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4} (x_R - x_L)\,dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left[(y + 1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y\,\Big]_{-2}^{4} \\ &= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18 \end{aligned}$$

Pudo haber calculado el área del ejemplo 6 integrando con respecto a x en lugar de y, pero el cálculo es más complicado. Podría haber significado dividir la región en dos y determinar las áreas A_1 y A_2 de la figura 14. El método aplicado en el ejemplo 6 es mucho más fácil.