INTEGRALES DE FRACCIONES PARCIALES –

Recordar del álgebra que cada polinomio con coeficientes reales puede factorizarse en factores lineales y cuadráticos irreductibles.* Por ejemplo, el polinomio

$$x^5 + x^4 - x - 1$$

puede escribirse como

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - x - 1 &= x^4(x+1) - (x+1) \\ &= (x^4 - 1)(x+1) \\ &= (x^2+1)(x^2-1)(x+1) \\ &= (x^2+1)(x+1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)(x+1)^2(x^2+1) \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Factores lineales distintos

Escribir la descomposición de la fracción parcial para $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

Solución Porque $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$, incluir una fracción parcial para cada factor y escribir

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

donde A y B serán determinados. Multiplicando esta ecuación por el mínimo común denominador $(x-3)(x-2)$ da la **ecuación básica**

$$1 = A(x-2) + B(x-3). \qquad \text{Ecuación básica.}$$

Porque esta ecuación es cierta para todo x, se puede sustituir cualquier valor *conveniente* para x para obtener las ecuaciones en A y B. Los valores más convenientes son los que hacen los factores particulares igual a 0.

Para resolver para A, sea $x = 3$ y obtener

$$\begin{aligned} 1 &= A(3-2) + B(3-3) \qquad \text{Sea } x = 3 \text{ en la ecuación básica.} \\ 1 &= A(1) + B(0) \\ A &= 1. \end{aligned}$$

Para resolver para B, sea $x = 2$ y obtener

$$\begin{aligned} 1 &= A(2-2) + B(2-3) \qquad \text{Sea } x = 2 \text{ en la ecuación básica.} \\ 1 &= A(0) + B(-1) \\ B &= -1. \end{aligned}$$

Así, la descomposición es

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

como se muestra al principio de esta sección.

Asegurarse de que el método de fracciones parciales sólo es práctico para las integrales de funciones racionales cuyos denominadores factorizan "muy bien". Por ejemplo, si el denominador en el ejemplo 1 se cambiara a $x^2 - 5x + 5$, su factorización como

$$x^2 - 5x + 5 = \left[x + \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]\left[x - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]$$

sería demasiado complicada como para usar con las fracciones simples parciales. En casos así, es preferible completar el cuadrado o recurrir a integración simbólica en un sistema algebraico por computadora para realizar la integración. Al hacer esto, se obtiene

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 5}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|2x - \sqrt{5} - 5\right| - \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|2x + \sqrt{5} - 5\right| + C.$$

EJEMPLO 2 Factores lineales repetidos

Encontrar $\displaystyle\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx.$

Solución Porque

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + x &= x(x^2 + 2x + 1) \\ &= x(x + 1)^2 \end{aligned}$$

ÓN
usar
rtículo
s", por
llege

incluir una fracción para *cada potencia* de x y $(x + 1)$ y escribir

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador $x(x + 1)^2$ da la *ecuación básica*

$$5x^2 + 20x + 6 = A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx. \qquad \text{Ecuación básica.}$$

Para resolver para A, sea $x = 0$. Esto elimina los términos B y C y da

$$\begin{aligned} 6 &= A(1) + 0 + 0 \\ A &= 6. \end{aligned}$$

Para resolver para C, sea $x = -1$. Esto elimina los términos A y B y da

$$\begin{aligned} 5 - 20 + 6 &= 0 + 0 - C \\ C &= 9. \end{aligned}$$

Se han usado las opciones más convenientes para x, para encontrar el valor de B, usar cualquier *otro valor* de x junto con los valores calculados de A y C. Usando $x = 1$, $A = 6$ y $C = 9$ producen

$$\begin{aligned} 5 + 20 + 6 &= A(4) + B(2) + C \\ 31 &= 6(4) + 2B + 9 \\ -2 &= 2B \\ B &= -1. \end{aligned}$$

Así, sigue que

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x + 1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x + 1} + \frac{9}{(x + 1)^2}\right) dx \\ &= 6 \ln|x| - \ln|x + 1| + 9\frac{(x + 1)^{-1}}{-1} + C \\ &= \ln\left|\frac{x^6}{x + 1}\right| - \frac{9}{x + 1} + C. \end{aligned}$$

usarse
les como
9, para
acional
ejem-

EJEMPLO 3 Factores cuadráticos y lineales distintos

Encontrar $\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} dx$.

Solución Porque

$$(x^2 - x)(x^2 + 4) = x(x - 1)(x^2 + 4)$$

debe incluir una fracción simple para cada factor y escribir

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x - 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador $x(x - 1)(x^2 + 4)$ da la *ecuación básica*

$$2x^3 - 4x - 8 = A(x - 1)(x^2 + 4) + Bx(x^2 + 4) + (Cx + D)(x)(x - 1).$$

Para resolver para A, sea $x = 0$ y obtener

$$-8 = A(-1)(4) + 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = A.$$

Para resolver para B, sea $x = 1$ y obtener

$$-10 = 0 + B(5) + 0 \quad \Rightarrow \quad -2 = B.$$

En este punto, C y D serán determinados todavía. Encontrar estas constantes restantes eligiendo otros dos valores para x y resolviendo el sistema resultante de ecuaciones lineales. Si $x = -1$, entonces, usando $A = 2$ y $B = -2$, escribir

$$\begin{aligned} -6 &= (2)(-2)(5) + (-2)(-1)(5) + (-C + D)(-1)(-2) \\ 2 &= -C + D. \end{aligned}$$

Si $x = 2$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= (2)(1)(8) + (-2)(2)(8) + (2C + D)(2)(1) \\ 8 &= 2C + D. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema lineal sustrayendo la primera ecuación de la segunda

$$\begin{aligned} -C + D &= 2 \\ 2C + D &= 8 \end{aligned}$$

da $C = 2$. Por consiguiente, $D = 4$, y sigue que

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x - 1)(x^2 + 4)} dx &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x - 1} + \frac{2x}{x^2 + 4} + \frac{4}{x^2 + 4}\right) dx \\ &= 2 \ln|x| - 2 \ln|x - 1| + \ln(x^2 + 4) + 2 \arctan \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Usando los valores conocidos $A = 8$ y $B = 0$, escribir

$$13 = 2A + C = 2(8) + C \quad \Rightarrow \quad C = -3$$
$$0 = 2B + D = 2(0) + D \quad \Rightarrow \quad D = 0.$$

Por último, concluir que

$$\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2}\,dx = \int \left(\frac{8x}{x^2 + 2} + \frac{-3x}{(x^2 + 2)^2}\right) dx$$
$$= 4\ln(x^2 + 2) + \frac{3}{2(x^2 + 2)} + C.$$

EJEMPLO 4 Factores cuadráticos repetidos

Encontrar $\displaystyle\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2}\,dx.$

Solución Incluyen una fracción parcial para cada potencia de $(x^2 + 2)$ y escribir

$$\frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador $(x^2 + 2)^2$ da la *ecuación básica*.

$$8x^3 + 13x = (Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D.$$

Desarrollando la ecuación básica y agrupando como términos semejantes produce

$$8x^3 + 13x = Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D$$
$$8x^3 + 13x = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D).$$

Ahora, igualar los coeficientes de términos semejantes en ambos lados de la ecuación.

$8 = A$ $\qquad$ $0 = 2B + D$

$$8x^3 + 0x^2 + 13x + 0 = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D)$$

$0 = B$

$13 = 2A + C$