INTEGRALES INMEDIATAS

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

$$\int a \cdot dx = ax + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = L\,|\,x\,| + C$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{La} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int sen x dx = -cos\, x + C$$

$$\int cos\, x dx = sen x + C$$

$$\int sec^2\, x dx = tg x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsen x + C$$

$$\int [u(x)]^n \cdot u'(x) dx = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = L\,|\,u(x)\,| + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} dx = \sqrt{u(x)} + C$$

$$\int a^{u(x)} \cdot u'(x) dx = \frac{a^{u(x)}}{La} + C$$

$$\int e^{u(x)} \cdot u'(x) dx = e^{u(x)} + C$$

$$\int sen\, u(x) \cdot u'(x) dx = -\cos u(x) + C$$

$$\int \cos u(x) \cdot u'(x) dx = sen\, u(x) + C$$

$$\int \sec^2 u(x) \cdot u'(x) dx = tg\, u(x) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2} dx = arctg\, u(x) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}} dx = arcsen\, u(x) + C$$

EJEMPLO 2 Aplicación de las reglas básicas de integración

Describir las antiderivadas o primitivas de $3x$.

Solución

$$\int 3x\,dx = 3\int x\,dx \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$

$$= 3\int x^1\,dx \qquad \text{Reescribir } x \text{ como } x^1.$$

$$= 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + C \qquad \text{Regla de potencia } (n = 1).$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + C \qquad \text{Simplificar.}$$

De tal manera, las antiderivadas o primitivas de $3x$ son de la forma $\frac{3}{2}x^2 + C$, donde C es cualquier constante.

Cuando se evalúan integrales indefinidas, una aplicación estricta de las reglas básicas de integración tiende a producir complicadas constantes de integración. En el caso del ejemplo 2, se podría haber escrito

$$\int 3x\,dx = 3\int x\,dx = 3\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = \frac{3}{2}x^2 + 3C.$$

Sin embargo, como C representa *cualquier* constante, es tanto problemático como innecesario escribir $3C$ como la constante de integración. De tal modo, $\frac{3}{2}x^2 + 3C$ se escribe en la forma más simple, $\frac{3}{2}x^2 + C$.

En el ejemplo 2, advertir que el patrón general de integración es similar al de la derivación.

Integral original ⇨ Reescribir ⇨ Integrar ⇨ Simplificar

EJEMPLO 3 Reescribir antes de integrar

TECNOLOGÍA Algunos programas de software tales como *Maple*, *Mathematica* y el *TI-89*, son capaces de efectuar simbólicamente la integración. Si se tiene acceso a estas herramientas de integración simbólica, utilizarlas para calcular las integrales indefinidas del ejemplo 3.

	Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
a)	$\int \frac{1}{x^3}\,dx$	$\int x^{-3}\,dx$	$\frac{x^{-2}}{-2} + C$	$-\frac{1}{2x^2} + C$
b)	$\int \sqrt{x}\,dx$	$\int x^{1/2}\,dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + C$
c)	$\int 2 \operatorname{sen} x\,dx$	$2\int \operatorname{sen} x\,dx$	$2(-\cos x) + C$	$-2\cos x + C$

Recordar que, por simple derivación, puede comprobarse si una primitiva es correcta. Así, en el ejemplo 3*b*, para saber si la primitiva $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$ es correcta, basta con derivarla para obtener

$$D_x\left[\frac{2}{3}x^{3/2} + C\right] = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^{1/2} = \sqrt{x}. \qquad \text{Usar la derivación para verificar la antiderivada.}$$

EJEMPLO 4 Integración de funciones polinomiales

$$a)\quad \int dx = \int 1\,dx$$ Se entiende que el integrando es uno.

$$= x + C$$ Integrar.

$$b)\quad \int (x+2)\,dx = \int x\,dx + \int 2\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + C_1 + 2x + C_2$$ Integrar.

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + C$$ $C = C_1 + C_2$.

La segunda línea en la solución suele omitirse.

$$c)\quad \int (3x^4 - 5x^2 + x)\,dx = 3\left(\frac{x^5}{5}\right) - 5\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{x^2}{2} + C$$ Integrar.

$$= \frac{3}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$ Simplificar.

EJEMPLO 5 Reescribir antes de integrar

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$ Reescribir como dos fracciones.

$$= \int (x^{1/2} + x^{-1/2})\,dx$$ Reescribir con exponentes fraccionarios.

$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C$$ Integrar.

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C$$ Simplificar.

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x}(x+3) + C$$

E ESTUDIO Recordar que
esta puede verificarse por
ón.

EJEMPLO 6 Reescribir antes de integrar

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) dx$$ Reescribir como un producto.

$$= \int \sec x \tan x\,dx$$ Reescribir utilizando identidades trigonométricas.

$$= \sec x + C$$ Integrar.

EJEMPLO 7 Determinación de una solución particular

Encontrar la solución general de

$$F'(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$$

y determinar la solución particular que satisface la condición inicial $F(1) = 0$.

Solución Para encontrar la solución general, se integra para obtener

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{x^2}\,dx && F(x) = \textstyle\int F'(x)dx. \\ &= \int x^{-2}\,dx && \text{Reescribir como una potencia.} \\ &= \frac{x^{-1}}{-1} + C && \text{Integrar.} \\ &= -\frac{1}{x} + C, \quad x > 0. && \text{Solución general.} \end{aligned}$$

Utilizando la condición inicial $F(1) = 0$, resolver para C de la manera siguiente.

$$F(1) = -\frac{1}{1} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

EJEMPLO 3 Calcule $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN Al aplicar el TFC2 y la tabla 1, tiene

$$\begin{aligned} \int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx &= \frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^2}{2}\Big]_0^3 \\ &= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right) \\ &= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6.75 \end{aligned}$$

V EJEMPLO 4 Determine $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx$ e interprete el resultado en función de áreas.

SOLUCIÓN El teorema fundamental da

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx &= 2\,\frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^2}{2} + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2 \\ &= \tfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(2^4) - 3(2^2) + 3\tan^{-1}2 - 0 \\ &= -4 + 3\tan^{-1}2 \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx \approx -0.67855$$

EJEMPLO 5 Evalúe $\displaystyle\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\, dt.$

SOLUCIÓN En primer lugar, necesita escribir el integrando en una forma más sencilla, al llevar a cabo la división:

$$\begin{aligned}
\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\, dt &= \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\, dt \\
&= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Bigg]_1^9 = 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Bigg]_1^9 \\
&= \left[2 \cdot 9 + \tfrac{2}{3}(9)^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right] - \left(2 \cdot 1 + \tfrac{2}{3} \cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right) \\
&= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^4 |v(t)|\, dt &= \int_1^3 [-v(t)]\, dt + \int_3^4 v(t)\, dt \\
&= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\, dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\, dt \\
&= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4 \\
&= \frac{61}{6} \approx 10.17 \text{ m}
\end{aligned}$$