TALLER 7

Ecuación de movimiento para rotaciones. Aplicaciones. Movimiento combinado de rotación más traslación. Aplicaciones.
Energía cinética rotacional ( ). Energía total de un cuerpo rígido. Aplicaciones.
Movimiento por rodadura. Estática de un cuerpo rígido. Aplicaciones.
Taller general.

LA TORCA (o MOMENTO DE TORSIÓN) (τ) debida a una fuerza ejercida alrededor de un eje, se definió en el capítulo 5. En ocasiones también se le llama momento de la fuerza.

EL MOMENTO DE INERCIA (I) de un cuerpo es la medida de la inercia rotacional del cuerpo. Si un objeto que puede girar libremente alrededor de un eje presenta gran dificultad para hacerlo girar, se dice que su momento de inercia alrededor de dicho eje es grande. Un objeto con I pequeña tiene poca inercia rotacional.

Si un cuerpo se considera constituido por pequeñas masas $m_1, m_2, m_3, \ldots$, a las distancias respectivas $r_1, r_2, r_3, \ldots$, a partir de un eje, su momento de inercia en torno a ese eje es

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots = \sum m_i r_i^2$$

Las unidades de I son $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Es conveniente definir un **radio de giro** (k) para un objeto alrededor de un eje por la relación

$$I = Mk^2$$

donde M es la masa total del objeto. En consecuencia, k es la distancia a la cual se debe colocar una masa puntual M desde el eje, si la masa va a tener la misma I que tiene el objeto.

TORCA Y ACELERACIÓN ANGULAR: Una torca τ que actúa sobre un cuerpo que tiene un ***momento de inercia I*** produce en él una aceleración angular α dada por

$$\tau = I\alpha$$

Aquí τ, I y α están calculadas con respecto al mismo eje. En cuanto a las unidades, τ está en $\text{N} \cdot \text{m}$, I en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ y α debe darse en rad/s^2 (recuerde el equivalente traslacional, $F = ma$).

LA ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN (EC_r) de una masa cuyo momento de inercia alrededor de un eje es I, y rota alrededor del eje con una velocidad angular ω, es

$$\text{EC}_r = \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

donde la energía está en joules (J) y ω debe estar en rad/s. (Recuerde el equivalente traslacional, $\text{EC} = \frac{1}{2}mv^2$.)

ROTACIÓN Y TRASLACIÓN COMBINADAS: La EC de una pelota que rueda, o de otro objeto de masa M que ruede, es la suma de 1) su energía cinética rotacional EC *alrededor de un eje que pasa por su centro de masa* (es decir, c.m.) (capítulo 8); y 2) la energía cinética traslacional EC de una masa puntual equivalente que se mueve con el centro de masa. En otras palabras, de manera aproximada, la EC total es igual a la EC alrededor del *c.m.* más la EC del *c.m.* Expresado en símbolos,

$$\text{EC}_{\text{total}} = \tfrac{1}{2} I\omega^2 = \tfrac{1}{2} Mv^2$$

Observe que I es el momento de inercia del objeto en torno a un eje que pasa a través de su centro de masa.

EL TRABAJO (W) efectuado sobre un cuerpo en rotación durante un desplazamiento angular θ por una torca constante τ está dado por

$$W = \tau\theta$$

donde W está en joules y θ debe estar en radianes. (Recuerde el equivalente traslacional, $W = Fs$.)

LA POTENCIA (P) transmitida a un cuerpo por una torca está dada por

$$\text{P} = \tau\omega$$

donde τ es la torca aplicada alrededor del eje de rotación y ω es la rapidez angular, alrededor del mismo eje; ω debe darse en radianes. (Recuerde el equivalente traslacional, $\text{P} = Fv$.)

LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR ($\vec{\mathbf{L}}$) es una cantidad vectorial que tiene magnitud $I\omega$ y está dirigida a lo largo del eje de rotación. (Recuerde el equivalente traslacional, $x = m\,\vec{\mathbf{x}}$). Si la torca neta sobre un cuerpo es cero, la cantidad de movimiento angular permanece sin cambios tanto en magnitud como en dirección. Ésta es la **ley de conservación de la cantidad de movimiento angular**.

EL IMPULSO ANGULAR tiene magnitud τt, donde t es el tiempo durante el cual una torca constante τ actúa sobre el cuerpo. En analogía con el caso lineal, un impulso angular τt sobre un cuerpo causa un cambio en la cantidad de movimiento angular del cuerpo dado por la ecuación

$$\tau t = I\omega_f - I\omega_i$$

TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS: El momento de inercia I de un cuerpo alrededor de un eje paralelo a un eje que pasa por su centro de masa es

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

donde I_{cm} = momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro de masa

M = masa total del cuerpo

h = distancia perpendicular entre los dos ejes paralelos

En la figura 10-1 se muestran los momentos de inercia (alrededor de un eje que pasa a través del centro de masa) de algunos objetos uniformes de masa M.

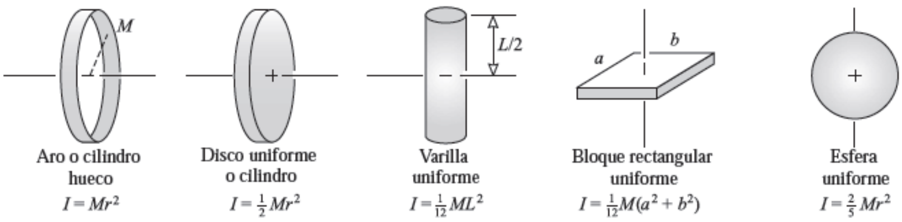


Figura 10-1

ANALOGÍA ENTRE CANTIDADES LINEALES Y ANGULARES:

Desplazamiento lineal	s	$\leftrightarrow$	desplazamiento angular	θ
Rapidez lineal	v	$\leftrightarrow$	rapidez angular	ω
Aceleración lineal	a_T	$\leftrightarrow$	aceleración angular	α
Masa (inercia)	m	$\leftrightarrow$	momento de inercia	I
Fuerza	F	$\leftrightarrow$	torca	τ
Cantidad de movimiento lineal	mv	$\leftrightarrow$	cantidad de movimiento angular	$I\omega$
Impulso lineal	Ft	$\leftrightarrow$	impulso angular	τt

Si, en las ecuaciones de movimiento lineal, se reemplazan las cantidades lineales con las correspondientes cantidades angulares, se obtendrán las ecuaciones correspondientes para movimiento angular. Así pues, se tiene

Lineal:	$F = ma$	$\mathrm{EC} = \frac{1}{2}mv^2$	$W = Fs$	$\mathrm{P} = Fv$
Angular:	$\tau = I\alpha$	$\mathrm{EC}_r = \frac{1}{2}I\omega^2$	$W = \tau\theta$	$\mathrm{P} = \tau\omega$

10.1 [I] Una pequeña esfera de 2.0 kg de masa gira en el extremo de una cuerda de 1.2 m de largo en un plano horizontal alrededor de un eje vertical. Determine su momento de inercia con respecto a ese eje.

Una esfera pequeña en el extremo de una cuerda larga recuerda a una masa puntual que gira en torno a un eje a una distancia radial r. En consecuencia, su momento de inercia está dado por

$$I_{\bullet} = m_{\bullet}r^2 = (2.0\ \text{kg})(1.2\ \text{m})^2 = 2.9\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

10.2 [I] ¿Cuál es el momento de inercia de una esfera sólida homogénea de 10 kg de masa y radio de 20 cm, alrededor de un eje que pasa por su centro?

A partir de la última parte de la figura 10-1, para una esfera

$$I = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5}(10\ \text{kg})(0.20\ \text{m})^2 = 0.16\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

10.3 [I] Un aro cilíndrico delgado con un diámetro de 1.0 m y una masa de 400 g rueda hacia abajo de la calle. ¿Cuál es el momento de inercia del aro en torno a su eje central de rotación?

A partir de la primera parte de la figura 10.1, para un aro

$$I = MR^2 = (0.400\ \text{kg})(0.50\ \text{m})^2 = 0.10\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I\omega = (0.00098\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(188\ \text{rad/s}) = 0.18\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

c) Para cualquier objeto, $I = Mk^2$, donde k es el radio de giro. Entonces

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}} = \sqrt{\frac{0.00098\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}{0.50\ \text{kg}}} = 0.044\ \text{m} = 4.4\ \text{cm}$$

Note que éste es un valor razonable en vista de que se trata de una esfera cuyo radio es de 7.0 cm.

10.6 [II] La hélice de un avión tiene una masa de 70 kg y un radio de giro de 75 cm. Encuentre su momento de inercia. ¿De qué magnitud es la torca necesaria para darle una aceleración angular de 4.0 rev/s²?

$$I = Mk^2 = (70\ \text{kg})(0.75\ \text{m})^2 = 39\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Para usar $\tau = I\alpha$, se debe tener α en rad/s²:

$$\alpha = \left(4.0\frac{\text{rev}}{\text{s}^2}\right)\left(2\pi\frac{\text{rad}}{\text{rev}}\right) = 8.0\pi\ \text{rad/s}^2$$

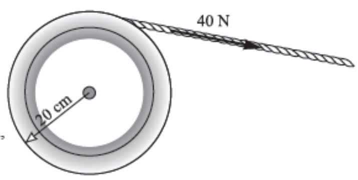
entonces $$\tau = I\alpha = (39\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(8.0\pi\ \text{rad/s}^2) = 0.99\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

10.7 [III] Como se muestra en la figura 10-2, una fuerza constante de 40 N se aplica tangencialmente al borde de una rueda de 20 cm de radio. La rueda tiene un momento de inercia de 30 kg · m². Encuentre *a)* la aceleración angular, *b)* la rapidez angular después de 4.0 s si parte del reposo y *c)* el número de revoluciones realizadas en 4.0 s. *d)* Demuestre que el trabajo efectuado sobre la rueda en los 4.0 s es igual a la EC_r de la rueda al cabo de los 4.0 s.

a) Utilizando $\tau = I\alpha$, se obtiene

$$(40\ \text{N})(0.20\ \text{m}) = (30\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\,\alpha$$

de donde $\alpha = 0.267\ \text{rad/s}^2$ o $0.27\ \text{rad/s}^2$.



b) Se usa $\omega_f = \omega_i + \alpha t$, para encontrar la rapidez angular final,

$$\omega_f = 0 + (0.267\ \text{rad/s}^2)(4.0\ \text{s}) = 1.07\ \text{rad/s} = 1.1\ \text{rad/s}$$

c) En virtud de que $\theta = \omega_{prom}t = \frac{1}{2}(\omega_f + \omega_i)t$, se tiene

Figura 10.2

$$0 = \tfrac{1}{2}(1.07\ \text{rad/s})(4.0\ \text{s}) = 2.14\ \text{rad}$$

que equivale a 0.34 revoluciones.

d) Se sabe que trabajo = torca × θ, por ende

$$\text{Trabajo} = (40\ \text{N} \times 0.20\ \text{m})(2.14\ \text{rad}) = 17\ \text{J}$$

Note que deben usarse radianes. La EC_r final es $\frac{1}{2}I\omega_f^2$, por tanto

$$EC_r = \tfrac{1}{2}(30\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(1.07\ \text{rad/s})^2 = 17\ \text{J}$$

El trabajo realizado es igual a la EC_r.

10.8 [II] La rueda de un molino es un disco uniforme de 0.90 kg y de 8.0 cm de radio. Se lleva uniformemente al reposo desde una rapidez de 1 400 rpm en un tiempo de 35 s. ¿De qué magnitud es la torca de fricción que frena su movimiento?

Primero se encontrará α a partir del cambio en ω; a continuación se empleará $\tau = I\alpha$ para encontrar τ. Se sabe que $f = 1\,400$ rev/min $= 23.3$ rev/s, y dado que $\omega = 2\pi f$, $\omega_i = 146$ rad/s y $\omega_f = 0$. Entonces,

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{-146\ \text{rad/s}}{35\ \text{s}} = -4.2\ \text{rad/s}^2$$

También se necesita conocer I. Para un disco uniforme,

$$I = \tfrac{1}{2}Mr^2 = \tfrac{1}{2}(0.90\ \text{kg})(0.080\ \text{m})^2 = 2.9 \times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Entonces $$\tau = I\alpha = (0.002\,9\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(-4.2\ \text{rad/s}^2) = -1.2 \times 10^{-2}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

10.9 [II] Repita el problema 10.8 utilizando la relación entre trabajo y energía.

La rueda originalmente tiene EC_r, pero, a medida que la rueda se detiene, esta energía se pierde al realizar trabajo de fricción. Por consiguiente, se puede escribir

10.11 [III] Como se muestra en la figura 10-3, una masa $m = 400$ g cuelga del borde de una rueda de radio $r = 15$ cm. Cuando se suelta desde el reposo, la masa cae 2.0 m en 6.5 s. Determine el momento de inercia de la rueda.

Se escribirá $\tau = I\alpha$ para la rueda y $F = ma$ para la masa. Pero primero se determina a utilizando $y = v_i t + \frac{1}{2}at^2$:

$$2.0\ \text{m} = 0 + \tfrac{1}{2}a(6.5\ \text{s})^2$$

la cual da $a = 0.095\ \text{m/s}^2$. Luego, a partir de $a_T = \alpha r$,

$$\alpha = \frac{a_T}{r} = \frac{0.095\ \text{m/s}^2}{0.15\ \text{m}} = 0.63\ \text{rad/s}^2$$

La fuerza neta sobre la masa m es $mg - F_T$ y por tanto $F = ma$ se convierte en

$$mg - F_T = ma_T$$
$$(0.40\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) - F_T = (0.40\ \text{kg})(0.095\ \text{m/s}^2)$$

de donde $F_T = 3.88$ N.

Ahora se escribe $\tau = I\alpha$ para la rueda:

$$(F_T)(r) = I\alpha \qquad \text{o} \qquad (3.88\ \text{N})(0.15\ \text{m}) = I(0.63\ \text{rad/s}^2)$$

de donde $I = 0.92\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.

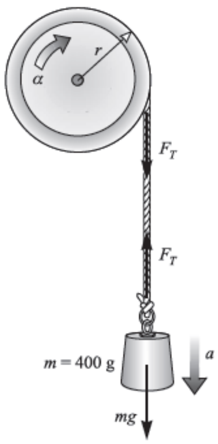


Figura 10-3

10.12 [III] Repita el problema 10.11 usando consideraciones de energía.

Inicialmente, la masa m tiene $EP_G = mgh$, donde $h = 2.0$ m. Esta EP_G se convierte totalmente en una cantidad igual de EC. Parte de esta EC es la EC traslacional de la masa y el resto es EC_r de la rueda:

10.13 [III] El momento de inercia del sistema de poleas de la figura 10.4 es $I = 1.70\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, mientras que $r_1 = 50$ cm y $r_2 = 20$ cm. Encuentre la aceleración angular del sistema de poleas y las tensiones F_{T1} y F_{T2}.

Observe para iniciar que $a = \alpha r$, por tanto, $a_1 = (0.50\ \text{m})\alpha$ y $a_2 = (0.20\ \text{m})\alpha$. Para ambas masas se escribe $F = ma$, mientras que para la rueda se escribe $\tau = I\alpha$, considerando como positiva la dirección del movimiento:

$$(2.0)(9.81)\ \text{N} - F_{T1} = 2a_1 \quad \text{o} \quad 19.6\ \text{N} - F_{T1} = (1.0\ \text{m})\alpha$$

$$F_{T2} - (1.8)(9.81)\ \text{N} = 1.8a_2 \quad \text{o} \quad F_{T2} - 17.6\ \text{N} = (0.36\ \text{m})\alpha$$

$$(F_{T1})(r_1) - (F_{T2})(r_2) = I\alpha \quad \text{o} \quad (0.50\ \text{m})F_{T1} - (0.20\ \text{m})F_{T2} = (1.70\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$$

Estas tres ecuaciones tienen tres incógnitas. Al resolver para F_{T1} en la primera ecuación y sustituir en la tercera se obtiene

$$(9.81\ \text{N}\cdot\text{m}) - (0.50\ \text{m})\alpha - (0.20\ \text{m})F_{T2} = (1.70\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$$

Se resuelve esta ecuación parar F_{T2} y se sustituye en la segunda ecuación para obtener

$$-11\alpha + 49 - 17.6 = 0.36\alpha$$

de donde $\alpha = 2.8\ \text{rad/s}^2$.

Ahora se puede regresar a la primera ecuación para obtener $F_{T1} = 17$ N y a la segunda ecuación para obtener $F_{T2} = 19$ N.

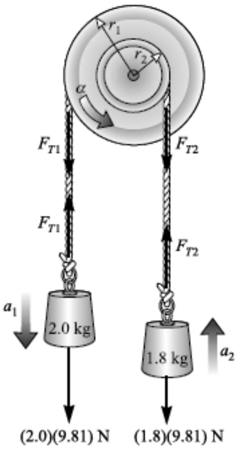


Figura 10-4

10.14 [II] Utilice métodos de energía para calcular la rapidez de la masa de 2.0 kg de la figura 10-4 cuando ha caído 1.5 m desde el reposo. Utilice los mismos valores que en el problema 10.10 para I, r_1 y r_2.

Si la rapidez angular de la rueda es ω, entonces $v_1 = r_1\omega$ y $v_2 = r_2\omega$. Si la rueda gira un ángulo θ, la masa de 2.0 kg cae una distancia s_1 y la masa de 1.8 kg sube una distancia s_2:

$$\theta = \frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} \qquad \text{de donde} \qquad s_2 = s_1\frac{r_2}{r_1}$$

De la conservación de la energía, dado que EP_G disminuye y EC aumenta,

$$m_1gs_1 - m_2gs_2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

Dado que

$$s_2 = (20/50)(1.5\ \text{m}) = 0.60\ \text{m} \qquad v_1 = (0.50\ \text{m})\omega \qquad v_2 = (0.20\ \text{m})\omega$$

se puede resolver para encontrar $\omega = 4.07\ \text{rad/s}$. Por consiguiente

$$v_1 = r_1\omega = (0.50\ \text{m})(4.07\ \text{rad/s}) = 2.0\ \text{m/s}$$

10.15 [I] Un motor gira a 20 rev/s y suministra una torca de 75 N · m. ¿Cuál es la potencia en hp que desarrolla?

Con $\omega = 20\ \text{rev/s} = 40\pi\ \text{rad/s}$, se tiene

$$P = \tau\omega = (75\ \text{N}\cdot\text{m})(40\pi\ \text{rad/s}) = 9.4\ \text{kW} = 13\ \text{hp}$$

10.16 [I] Una rueda motriz que acciona una banda de transmisión conectada a un motor eléctrico tiene un diámetro de 38 cm y opera a 1 200 rpm. La tensión en la banda es de 130 N en el lado flojo y de 600 N en el lado tenso. Encuentre la potencia, en hp, que transmite la rueda a la banda.

Se usará $P = \tau\omega$. En este caso, dos torcas, debidas a las dos partes de la banda, actúan sobre la rueda. Se tiene

$$f = 1\,200\ \text{rev/min} = 20\ \text{rev/s}$$

y

$$\omega = 40\pi\ \text{rad/s}$$

así

$$P = [(600 - 130)(0.19)\ \text{N}\cdot\text{m}](40\pi\ \text{rad/s}) = 11\ \text{kW} = 15\ \text{hp}$$

10.17 [I] Un motor de 0.75 hp actúa durante 8.0 s sobre una rueda que inicialmente está en reposo y tiene un momento de inercia de 2.0 kg · m². Encuentre la rapidez angular que desarrolla la rueda, si supone que no hay pérdidas.

Trabajo realizado por el motor en 8.0 s = EC de la rueda después de 8.0 s

$$(\text{potencia})\ (\text{tiempo}) = \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

$$(0.75\ \text{hp})(746\ \text{W/hp})\ (8.0\ \text{s}) = \tfrac{1}{2}(2.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\omega^2$$

de donde $\omega = 67$ rad/s.

10.18 [II] Como se muestra en la figura 10-5, una esfera sólida uniforme rueda sobre una superficie horizontal a 20 m/s y luego rueda hacia arriba sobre un plano inclinado. Si las pérdidas debidas a la fricción son despreciables, ¿cuál será el valor de h en el lugar donde se detiene la esfera?

Las EC traslacional y rotacional de la esfera en la base del plano inclinado cambiarán a EP_G cuando la esfera se detenga. Por tanto, puede escribirse

$$\left(\tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2\right)_{\text{inicial}} = (Mgh)_{\text{final}}$$

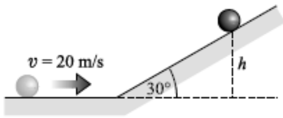


Figura 10-5

Para una esfera sólida, $I = \tfrac{2}{5}Mr^2$. Como $\omega = v/r$, la ecuación se convierte en

$$\tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{5}\right)(Mr^2)\left(\frac{v}{r}\right)^2 = Mgh \qquad \text{o}$$

$$\tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{5}v^2 = (9.81\ \text{m/s}^2)h$$

Utilizando $v = 20$ m/s se obtiene $h = 29$ m. Observe que la respuesta no depende de la masa de la esfera ni del ángulo del plano inclinado.

10.19 [II] Inicialmente en reposo, un aro de 20 cm de radio rueda hacia abajo de una colina hasta un punto que se encuentra 5.0 m por debajo del punto inicial. ¿Qué tan rápido rota en ese punto?

$$EP_G\ \text{inicial} = (EC_r + EC_t)\ \text{final}$$

$$Mgh = \tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv^2$$

Pero para un aro $I = Mr^2$ y $v = \omega r$. La ecuación anterior se convierte en

$$Mgh = \tfrac{1}{2}M\omega^2r^2 + \tfrac{1}{2}M\omega^2r^2$$

de donde

$$\omega = \sqrt{\frac{gh}{r^2}} = \sqrt{\frac{(9.81\ \text{m/s}^2)(5.0\ \text{m})}{(0.20\ \text{m})^2}} = 35\ \text{rad/s}$$

10.20 [II] Un disco sólido rueda sobre una pista; en la parte más alta de una colina su rapidez es de 80 cm/s. Si las pérdidas por fricción son despreciables, ¿con qué rapidez se mueve el disco cuando se encuentra a 18 cm por debajo de la cima?

En la cima, el disco tiene EC traslacional y rotacional, más su EP_G relativa al punto 18 cm abajo. En el punto final, la EP_G se transformó a más EC de rotación y traslación; por tanto, con $h = 18$ cm se puede escribir

$$(EC_t + EC_r)_{\text{inicial}} + Mgh = (EC_t + EC_r)_{\text{final}}$$

$$\tfrac{1}{2}Mv_i^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 + Mgh = \tfrac{1}{2}Mv_f^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_f^2$$

Para un disco sólido, $I = \tfrac{1}{2}Mr^2$. Además, $\omega = v/r$. Al sustituir estos valores y simplificar se obtiene

$$\tfrac{1}{2}v_i^2 + \tfrac{1}{4}v_i^2 + gh = \tfrac{1}{2}v_f^2 + \tfrac{1}{4}v_f^2$$

Como $v_i = 0.80$ m/s y $h = 0.18$ m, al sustituir se encuentra que $v_f = 1.7$ m/s.

10.26 [II] Un disco con momento de inercia I_1 gira libremente con rapidez angular ω_1 cuando se deja caer sobre él un segundo disco que no gira, con un momento de inercia I_2 (figura 10-10). Los dos giran después como una unidad. Encuentre la rapidez angular final.

De la ley de conservación de la cantidad de movimiento angular,

$$\text{Cantidad de movimiento angular antes} = \text{cantidad de movimiento angular después}$$

$$I_1\omega_1 + I_2(0) = I_1\omega + I_2\omega$$

Después de resolver, se encuentra $$\omega = \frac{I_1\omega_1}{I_1 + I_2}$$

10.27 [II] El disco inferior en la figura 10-10 tiene un momento de inercia I_1 alrededor del eje que se muestra. ¿Cuál será su nuevo momento de inercia si una pequeña masa M se coloca sobre él a una distancia R de su centro?

La definición del momento de inercia dice que, para el disco más la masa añadida,

$$I = \sum_{\text{disco}} m_i r_i^2 + MR^2$$

donde la suma se realiza sobre todas las masas que componen el disco original. Dado que el valor de dicha suma está dado como I_1, el nuevo momento de inercia es $I = I_1 + MR^2$.

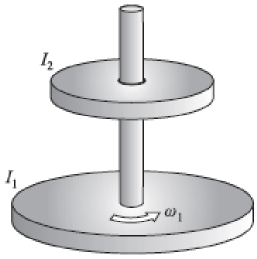


Figura 10-10

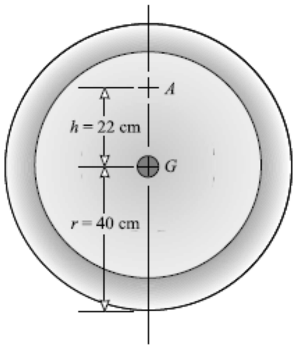


Figura 10-7

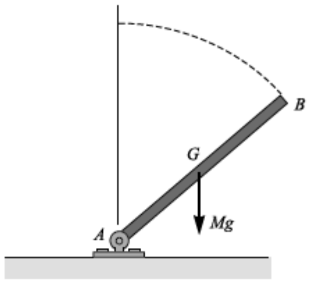


Figura 10-8

10.23 [III] Un enorme rodillo en forma de cilindro uniforme es jalado por un tractor para compactar la tierra. Este rodillo tiene 1.80 m de diámetro y un peso de 10 kN. Si los efectos de la fricción son despreciables, ¿qué potencia promedio, en hp, debe tener el tractor para acelerar desde el reposo hasta una rapidez de 4.0 m/s en una distancia horizontal de 3.0 m?

La potencia es igual al trabajo realizado por el tractor, dividido entre el tiempo que toma hacerlo. El tractor realiza el siguiente trabajo:

$$\text{Trabajo} = (\Delta\text{EC})_r + (\Delta\text{EC})_t = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 + \tfrac{1}{2}mv_f^2$$

Se tiene que $v_f = 4.0$ m/s, $\omega_f = v_f/r = 4.44$ rad/s y $m = 10\,000/9.81 = 1019$ kg. El momento de inercia del cilindro es

$$I = \tfrac{1}{2}mr^2 = \tfrac{1}{2}(1019\ \text{kg})(0.90\ \text{m})^2 = 413\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Sustituyendo estos valores, se encuentra que el trabajo requerido es de 12.223 kJ.

Se necesita saber el tiempo que se emplea en realizar este trabajo. Puesto que el rodillo recorrió 3.0 m con una velocidad promedio $v_{prom} = \tfrac{1}{2}(4 + 0) = 2.0$ m/s, se tiene

$$t = \frac{s}{v_{prom}} = \frac{3.0\ \text{m}}{2.0\ \text{m/s}} = 1.5\ \text{s}$$

Entonces
$$\text{Potencia} = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}} = \frac{12\,230\ \text{J}}{1.5\ \text{s}} = (8\,153\ \text{W})\left(\frac{1\ \text{hp}}{746\ \text{W}}\right) = 11\ \text{hp}$$

10.24 [III] Como se muestra en la figura 10-8, una varilla uniforme delgada *AB* de masa *M* y longitud *L* está sujeta por una bisagra colocada en el piso en su extremo *A*. Si inicialmente está en posición vertical y comienza a caer hacia el piso como se muestra, ¿con qué rapidez angular golpeará el piso?

El momento de inercia alrededor de un eje transversal a través del extremo *A* es

$$I_A = I_G + Mh^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

Conforme la varilla cae al piso, el centro de masa *G* cae una distancia $L/2$, por lo que se puede escribir

$$\text{EP}_G \text{ perdida por la varilla} = \text{EC}_r \text{ ganada por la varilla}$$

$$Mg\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3}\right)\omega^2$$

de donde $\omega = \sqrt{3g/L}$.

10.21 [II] Determine el momento de inercia de las cuatro masas que se muestran en la figura 10-6, relativo a un eje perpendicular a la página y que pasa a través de *a*) el punto *A* y *b*) el punto *B*.

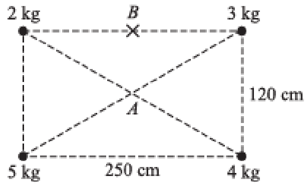


Figura 10-6

a) De la definición de momento de inercia

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_N r_N^2 = (2.0\text{ kg} + 3.0\text{ kg} + 4.0\text{ kg} + 5.0\text{ kg})(r^2)$$

donde r es la mitad de la longitud de la diagonal.

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1.20\text{ m})^2 + (2.50\text{ m})^2} = 1.39\text{ m}$$

Por tanto, $I = 27\text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

b) En este problema no se puede utilizar el teorema de ejes paralelos, en virtud de que ni el punto *A* ni el punto *B* están en el centro de masa. Por ello, se repite el procedimiento anterior. Dado que $r = 1.25$ m para las masas de 2.0 y 3.0 kg, mientras que $r = \sqrt{(1.20)^2 + (1.25)^2} = 1.733$ para las otras dos masas,

$$I_B = (2.0\text{ kg} + 3.0\text{ kg})(1.25\text{ m})^2 + (5.0\text{ kg} + 4.0\text{ kg})(1.733\text{ m})^2 = 33\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

10.22 [II] El disco uniforme circular que se muestra en la figura 10-7 tiene una masa de 6.5 kg y un diámetro de 80 cm. Calcule su momento de inercia alrededor de un eje perpendicular a la página que pase *a*) a través de *G* y *b*) a través de *A*.

a)
$$I_G = \tfrac{1}{2}Mr^2 = \tfrac{1}{2}(6.5\text{ kg})(0.40\text{ m})^2 = 0.52\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

b) Utilice el resultado de *a*) y el teorema de los ejes paralelos

$$I_A = I_G + Mh^2 = 0.52\text{ kg}\cdot\text{m}^2 + (6.5\text{ kg})(0.22\text{ m})^2 = 0.83\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$